Matematická logika

Rostislav Horčík

horcik@math.feld.cvut.cz
horcik@cs.cas.cz
www.cs.cas.cz/~horcik

Ekvisplnitelné množiny klausulí

Tvrzení

Ke každé konečné množině sentencí $K = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ existuje ekvisplnitelná množina klausulí S.

Jak se najde:

- Pro každou klausuli φ_i umíme najít ekvisplnitelnou množinu klausulí S_{φ_i}.
- Takže jedna možnost by byla vzít sentenci $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ a vyrobit $S_{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n}$.
- Tento postup ale vytváří zbytečně mnoho argumentů u skolemovských funkcí.
- Ve skutečnosti stačí vzít $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_{\varphi_i}$ s tím, že pro $i \neq j$ skolemovské funkce (konstanty) zavadené v S_{φ_i} jsou jiné než ty zavedené v S_{φ_j}.

Příklad

- Mějme splnitelnou množinu sentencí $K = \{\exists x\, P(x), \exists y(\neg P(y) \wedge Q(y))\}$.
- Označme $\varphi_1 = \exists x\, P(x)$ a $\varphi_2 = \exists y(\neg P(y) \wedge Q(y))$.
- Pak $S_{\varphi_1} = \{P(a)\}$ a $S_{\varphi_2} = \{\neg P(b), Q(b)\}$.
- Množina $S = S_{\varphi_1} \cup S_{\varphi_2} = \{P(a), \neg P(b), Q(b)\}$ je hledaný ekvisplnitelná množina klausulí.

- Kdybychom použili stejný konstatní symbol při vyrábění S_{φ_1} a S_{φ_2}, dostali bychom nesplnitelnou množinu klausulí

$$\{P(a), \neg P(a), Q(a)\}\,.$$

Jak zjistit nesplnitelnost množiny sentencí?

- Nyní umíme každou sentenci (ale i konečnou množinu sentencí) převést na ekvisplnitelnou množinu klausulí.
- Klausule jsou univerzálně kvantifikovaná formule.
- Pokud tedy chceme ukázat, že množina klausulí je nesplnitelná, musíme ukázat, že v každé struktuře najdeme prvky univerza dokazující nesplnitelnost dané množiny.
- Uvažujme např. množinu klausulí $\{P(x), \neg P(f(a))\}$.
- Když zasubstituujeme za x term $f(a)$ dostaneme $\{P(f(a)), \neg P(f(a))\}$, což je nesplnitelná množina.
- Kde brát prvky? V každé struktuře určitě máme k dispozici interpretace termů $a, f(a), f(f(a)), \ldots$

Herbrandovské univerzum

Definice

Nechť S je množina klausulí v jazyce $\mathcal{L}$. Herbrandovské univerzum H_S množiny S je definováno induktivně:

- $a \in H_S$ pro každý konstatní symbol z $\mathcal{L}$,
- $f(t_1, \ldots, t_n)$ pro každý n-ární funkční symbol z $\mathcal{L}$ a termy $t_1, \ldots, t_n \in H_S$.

Pokud jazyk $\mathcal{L}$ nemá konstatní symboly, přidáme do $\mathcal{L}$ jeden libovolný konstatní symbol.

Definice

Mějme Herbrandovské univerzum H_S množiny klausulí S v jazyce $\mathcal{L}$. Herbrandovská báze B_S pro S je množina všech atomických formulí v jazyce $\mathcal{L}$, které lze vyrobit z H_S.

Příklad

- Uvažujme množinu klausulí
$S_1 = \{P(a) \vee \neg P(b) \vee Q(z), \neg Q(z) \vee P(b)\}$. Pak
$$H_{S_1} = \{a, b\}\,, \qquad B_{S_1} = \{P(a), Q(a), P(b), Q(b)\}\,.$$

- Uvažujme množinu klausulí $S_2 = \{\neg P(x, f(y)), P(w, g(w))\}$. Pak
$$H_{S_2} = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), g(g(a)), \ldots\}\,.$$

$$B_{S_2} = \{P(a, a), P(a, f(a)), P(f(a), a), P(f(a), f(a)), P(a, g(a)), \ldots\}\,.$$

- Uvažujme množinu klausulí $S_3 = \{\neg P(a, f(x, y)) \vee P(b, f(x, y))\}$.
Pak
$$H_{S_3} = \{a, b, f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b), f(a, f(a, a)), \ldots\}\,.$$

Herbrandovská struktura

Definice

Nechť S je množina klausulí v jazyce $\mathcal{L}$. Herbrandovská $\mathcal{L}$-struktura pro množinu S je interpretace $\mathbf{H}_S$, jejíž univerzum je H_S a kde konstantní a funkční symboly jsou interpretovány:

- $a^{\mathbf{H}_S} = a$ pro každý konstatní symbol z $\mathcal{L}$,
- $f^{\mathbf{H}_S} = f$ pro každý funkční symbol z $\mathcal{L}$.

Predikátové symboly mohou být interpretovány libovolně.

Řekneme, že Herbrandovská struktura $\mathbf{H}_S$ pro množinu klausulí S je Herbrandovský model množiny S, pokud $\mathbf{H}_S$ je model S.

Herbrandova věta

Věta

Nechť S je množina klausulí v jazyce bez rovnosti $=$.

Pak S má model právě tehdy, když S má Herbrandovský model.

Jinými slovy S je splnitelná právě tehdy, když existuje Herbrandovská struktura pro množinu S, ve které je pravdivé každé $\varphi \in S$.

Poznámka

Pokud tedy chceme zjistit, jestli je S splnitelná, nemusíme zkoumat všechny struktury, ale stačí se omezit na Herbrandovské struktury.

Co s rovností?

- Uvažujme sentenci $\varphi = \forall x(\neg(f(x) = x) \wedge (f(f(x)) = x))$.
- Struktura $\mathbf{A} = \langle \{a, b\}, f^{\mathbf{A}} \rangle$, kde $f^{\mathbf{A}}(a) = b$ a $f^{\mathbf{A}}(b) = a$, je model φ.
- Herbrandovské univerzum pro φ je $H_\varphi = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$.
- φ zřejmě nemá Herbrandovský model $\mathbf{H}_\varphi$, protože $f(f(c)) \neq c$.

Rovnost

Věta

Nechť S je množina sentencí v jazyku s rovností. Pak existuje množina sentencí S_E v jazyku bez rovnosti taková, že S je splnitelná právě tehdy, když S_E je splnitelná.

Jak ji najdeme:

- Rozšíříme jazyk S o nový binární predikátový symbol E a každou atomickou formuli tvaru $t_1 = t_2$ nahradíme atomickou formulí $E(t_1, t_2)$.
- Následně přidáme ke vzniklé množině sentencí následující sentence:

Rovnost (pokr.)

1. Interpretace E je ekvivalence:
   - $\forall x\, E(x, x)$,
   - $\forall x \forall y (E(x, y) \Rightarrow E(y, x))$,
   - $\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \Rightarrow E(x, z))$.
2. Kompatibilita:
   - pro každý n-ární funkční symbol f:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \Rightarrow E(f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n)) \Big),$$

   - pro každý n-ární predikátový symbol P:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n \Big((\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i) \wedge P(x_1, \dots, x_n)) \Rightarrow P(y_1, \dots, y_n) \Big).$$

Příklad

- Nechť $S = \{\forall x(\neg(f(x) = x) \wedge (f(f(x)) = x))\}$.
- Pak

$$\begin{aligned} S_E \;=\; & \{\forall x(\neg E(f(x), x) \wedge E(f(f(x)), x)),\ \forall x\, E(x, x), \\ & \forall x \forall y(E(x, y) \Rightarrow E(y, x)), \\ & \forall x \forall y \forall z((E(x, y) \wedge E(y, z)) \Rightarrow E(x, z)), \\ & \forall x \forall y(E(x, y) \Rightarrow E(f(x), f(y))\}\,. \end{aligned}$$

- S_E má Herbrandovský model $\mathbf{H}_{S_E}$, kde $H_{S_E} = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$ a $E^{\mathbf{H}_{S_E}}$ je ekvivalence na H_{S_E}, jejíž rozklad obsahuje tyto dvě třídy ekvivalence:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{t \in H_{S_E} \mid \text{v } t \text{ se vyskytuje sudý počet symbolu } f\}\,, \\ C_2 &= \{t \in H_{S_E} \mid \text{v } t \text{ se vyskytuje lichý počet symbolu } f\}\,. \end{aligned}$$

Ground instance

Definice

Nechť S je množina klausulí a $\varphi \in S$. Ground instance klausule φ je libovolná klausule, která vznikne z φ odstraněním všech kvantifikátorů a substitucí prvků z H_S za všechny její proměnné. Např. $\neg P(f(a)) \vee Q(f(f(a)), b)$ je ground instance $\forall x \forall y(\neg P(x) \vee Q(f(x), y))$, která vznikne substitucí $x/f(a)$ a y/b.

Definice

Mějme množinu klausulí S. Ground instance klausulí z množiny S se skládají pouze z prvků B_S a logických spojek. Zaveďme pro každou formuli ψ v B_S výrokovou proměnnou v_ψ. Nechť α je ground instance některé klausule z S. Symbolem α^V označíme formuli výrokové logiky, která vznikne z α nahrazením všech výskytů formulí z B_S odpovídající výrokovou proměnnou.

Příklad

Mějme množinu klausulí $\{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$. Pak

$$H_S = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots\}.$$

$$\begin{aligned} B_S = \{&P(a), P(b), P(f(a)), P(f(b)), \dots, \\ &Q(a, a), Q(a, b), Q(b, b), Q(f(a), a)), Q(f(f(a)), b), \dots\}. \end{aligned}$$

Pro ground instanci $\alpha = \neg P(f(a)) \vee Q(f(f(a)), b)$ máme

$$\alpha^V = \neg v_{P(f(a))} \vee v_{Q(f(f(a)),b)}.$$

Důsledek Herbrandovy věty

Věta

Nechť S je množina klausulí v jazyce bez rovnosti. Pak S je nesplnitelná právě tehdy, když existuje konečná množina $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ground instancí prvků z S taková, že množina $\{\alpha_1^V, \dots, \alpha_n^V\}$ je výrokově nesplnitelná.

Algoritmus na nesplnitelnost

Herbrandova věta dává návod jak poznat nesplnitelnost sentence φ (konečné množiny sentencí).

1. Vyrobíme ekvisplnitelnou množinu klausulí S_φ.
2. Vygenerujeme konečně mnoho prvků Herbrandova univerza H_{S_φ}.
3. Pomocí těchto prvků vygenerujeme ground instance klausulí z S_φ.
4. DP algoritmem ověříme nesplnitelnost.
5. Pokud je splnitelná vrať se k bodu 2.

Tento algoritmus není efektivní. Příště si ukážeme efektivnější algoritmus.

Příklad

- Uvažujme sentenci $\neg(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)))$.
- $\neg(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall y\, P(y) \Rightarrow \forall z\, Q(z)))$.
- $\neg\forall z\exists x\exists y((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow Q(z)))$.
- $\exists z\forall x\forall y\neg(\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg P(y) \vee Q(z)))$.
- $\exists z\forall x\forall y((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z))$.
- $\forall x\forall y((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(a))$.
- $S = \{\neg P(x) \vee Q(x), P(y), \neg Q(a)\}$.
- $H_S = \{a\}$
- Substituce a za x a y dává $\{\neg P(a) \vee Q(a), P(a), \neg Q(a)\}$
- Odpovídající výroková množina klausulí $\{\neg p \vee q, p, \neg q\}$ není splitelná.

Příklad (ten stejný s jiným postupem)

- Uvažujme sentenci $\neg(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x)))$.
- $\neg(\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall y\, P(y) \Rightarrow \forall z\, Q(z)))$.
- $\neg\exists x \exists y \forall z((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(y) \Rightarrow Q(z)))$.
- $\forall x \forall y \exists z \neg(\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \vee (\neg P(y) \vee Q(z)))$.
- $\forall x \forall y \exists z((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(z))$.
- $\forall x \forall y((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(y) \wedge \neg Q(f(x,y)))$.
- $S = \{\neg P(x) \vee Q(x), P(y), \neg Q(f(x,y))\}$.
- $H_S = \{a, f(a,a), f(f(a,a),a), f(a,f(a,a)), f(f(a,a),f(a,a),\ldots\}$
- Ground inst. $\{\neg P(f(a,a)) \vee Q(f(a,a)), P(f(a,a)), \neg Q(f(a,a))\}$, kde první dvě vznikly substitucí $x/f(a,a)$, $y/f(a,a)$ a třetí substitucí $x/a, y/a$.
- Odpovídající výroková množina klausulí $\{\neg p \vee q, p, \neg q\}$ není splitelná.