1 Lineární obaly, báze a dimenze

Definice 1 *Nechť L je lineární prostor. Neprázdná konečná množina $K \subseteq L$, $K = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ se nazývá LZ, pokud je LZ konečná posloupnost $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Nekonečná množina $M \subseteq L$ se nazývá LZ, pokud existuje konečná $K \subseteq M$, která je LZ. Množina, která není LZ je LN ($\emptyset$ je LN).*

Konečná množina $K = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ je tedy LN, pokud je LN konečná posloupnost $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ a nekonečná množina M je LN, pokud každá její konečná podmnožina je LN.

Příklad Množina $M = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ je nekonečná LN podmnožina lineárního prostoru všech polynomů, protože libovolná konečná podmnožina je LN. Skutečně, mějme libovolnou $K = \{x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_n}\}$. Pak

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \cdots + \alpha_n x^{k_n} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

je splněno jen pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, protože jedině polynom se samými nulovými koeficienty je roven nulovému polynomu.

Definice 2 *Nechť L je lin. prostor a $M \subseteq L$. Lineární obal $\langle M \rangle$ je množina všech lineárních kombinací prvků z M, tj.*

$$\langle M \rangle = \{\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Místo $\langle \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\} \rangle$ píšeme jen $\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$.

Vektor $\boldsymbol{z}$ patří tedy do lineárního obalu $\langle M \rangle$, pokud existuje $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in M$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.ž.

$$\boldsymbol{z} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n .$$

Příklad

$$\langle (1,5,3), (-2,0,4) \rangle = \{\alpha_1(1,5,3) + \alpha_2(-2,0,4) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha_1 - 2\alpha_2, 5\alpha_1, 3\alpha_1 + 4\alpha_2) \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\langle 1, x, x^2, x^3, \ldots \rangle = \mathbb{R}[x]$$

Věta 1 *Nechť L je lin. prostor a $M \subseteq L$. Pak $\langle M \rangle$ je nejmenší lin. podprostor prostoru L, který obsahuje M.*

DůKAZ: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \langle M \rangle$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{y} &= \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{v}_m \end{aligned}$$

pro nějaké $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in M$. Máme tedy

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n + \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{v}_m$$

$$\alpha \boldsymbol{x} = (\alpha\alpha_1)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\boldsymbol{u}_n$$

Takže $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \langle M \rangle$ a $\alpha \boldsymbol{x} \in \langle M \rangle$.

Zřejmě $M \subseteq \langle M \rangle$. Nechť U je lin. podprostor L a $M \subseteq U$. Ukážeme, že $\langle M \rangle \subseteq U$. Mějme $\boldsymbol{z} \in \langle M \rangle$, t.j.

$$\boldsymbol{z} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \,,$$

pro nějaké $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in M$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Protože každé $\boldsymbol{x}_i \in U$ a U je podprostor, musí $\alpha_i \boldsymbol{x}_i \in U$. Tudíž i součet $\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in U$. □

Věta 2 *Nechť L je lin. prostor, $M \subseteq L$ a $\boldsymbol{z} \in L$. Je-li $\boldsymbol{z} \in \langle M \rangle$, pak $\langle M \rangle = \langle M \cup \{\boldsymbol{z}\} \rangle$.*

DŮKAZ: Zřejmě $\langle M \rangle \subseteq \langle M \cup \{\boldsymbol{z}\} \rangle$. Protože $M \subseteq \langle M \rangle$ a $\{\boldsymbol{z}\} \subseteq \langle M \rangle$, máme $M \cup \{\boldsymbol{z}\} \subseteq \langle M \rangle$. Tudíž $\langle M \cup \{\boldsymbol{z}\} \rangle \subseteq \langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$. □

Věta 3 *Nechť L je lineární prostor, $M \subseteq L$ je LN množina a $\boldsymbol{z} \notin \langle M \rangle$. Pak též $M \cup \{\boldsymbol{z}\}$ je LN množina.*

DŮKAZ: Sporem. Přepokládejme, že $M \cup \{\boldsymbol{z}\}$ je LZ. Pak existují $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in M$ a reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ (alespoň jedno nenulové) t.ž.

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n + \alpha_{n+1} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{o} \,.$$

Číslo α_{n+1} nemůže být 0, protože jinak by M byla LZ. Tudíž

$$\boldsymbol{z} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \boldsymbol{x}_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \boldsymbol{x}_n \,.$$

Tedy $\boldsymbol{z} \in \langle M \rangle$ (spor). □

Definice 3 *Nechť L je lin. prostor a $B \subseteq L$. B se nazývá báze lin. prostoru L, pokud*

1. *B je LN,*
2. *$\langle B \rangle = L$,*

Příklad $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ je báze lin. prostoru $\mathbb{R}[x]$. $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ je báze $\mathbb{R}^3$. Obecně množina uspořádaných n-tic

$$\{(1,0,\ldots,0,0),(0,1,\ldots,0,0),\ldots,(0,0,\ldots,1,0),(0,0,\ldots,0,1)\}$$

je báze $\mathbb{R}^n$, které se říká standardní.

Věta 4 *Nechť L je netriviální lin. prostor. Pak*

1. *Pro každou LN množinu $N \subseteq L$ existuje báze B lin. prostoru L t.ž. $N \subseteq B$.*
2. *Pro každou množinu $M \subseteq L$ t.ž. $\langle M \rangle = L$, existuje báze B lin. prostoru L t.ž. $B \subseteq M$.*

Věta 5 (Steinitzova o výměně) *Nechť L je lin. prostor, $M \subseteq L$, a $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subseteq \langle M \rangle$ je LN množina. Pak $\exists$ navzájem různé $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \in M$ t.ž.*

$$\langle M \rangle = \langle \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \cup (M \setminus \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}) \rangle \,.$$

DŮKAZ: Indukcí podle k. Pro $k = 0$ triviální, protože v množině M nic nenahrazujeme. Předpokládejme, že věta platí pro $k \geq 0$ a ukážeme, že platí i pro $k+1$. Nechť $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\} \subseteq \langle M \rangle$. Pak z indukčního předpokladu existují $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k \in M$ t.ž.

$$\langle M \rangle = \langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \cup (M \setminus \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k\}) \rangle \,.$$

Označme $M \setminus \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k\} = M'$. Tedy

$$\langle M \rangle = \langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \cup M' \rangle = \langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\} \cup M' \rangle \,.$$

Druhá rovnost platí, protože $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle M \rangle$. Protože $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\} \cup M' \rangle$ máme

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \dots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n + \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \dots + \beta_k \boldsymbol{v}_k \,,$$

pro nějaké $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in M'$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$. Protože $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$ je LN, musí být alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$. Bez újmy na obecnosti nechť $\alpha_1 \neq 0$. Pak

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_{k+1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \boldsymbol{x}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \boldsymbol{x}_n - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_1 - \dots - \frac{\beta_k}{\alpha_1} \boldsymbol{v}_k \,.$$

Tj.

$$\boldsymbol{x}_1 \in \langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\} \cup (M' \setminus \{\boldsymbol{x}_1\}) \rangle \,.$$

To ale podle Věty 2 znamená, že

$$\langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\} \cup (M' \setminus \{\boldsymbol{x}_1\}) \rangle = \langle \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\} \cup M' \rangle = \langle M \rangle$$

□

Značení: nechť M je množina, pak $|M|$ je počet jejích prvků pokud je konečná a jinak $|M| = \infty$.

Důsledek 1 *Nechť L je lin. prostor, $M \subseteq L$ a $N \subseteq \langle M \rangle$ je LN množina. Pak $|N| \leq |M|$.*

DŮKAZ: Pokud $|M| = \infty$ pak je to triviální. Pokud $|M| = n$ a $|N| > n$. Pak podle Steinitzovy věty lze vzít libovolnou $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{n+1}\} \subseteq N$ a nahradit jimi $n+1$ navzájem různých prvků z M. To ale nejde, protože $|M| = n$. □

Věta 6 *Nechť L je lin. prostor a B_1, B_2 jsou jeho báze. Pak $|B_1| = |B_2|$.*

DŮKAZ: Protože $B_1 \subseteq \langle B_2 \rangle$ máme $|B_1| \leq |B_2|$. Podobně $B_2 \subseteq \langle B_1 \rangle$ implikuje $|B_2| \leq |B_1|$. Takže $|B_1| = |B_2|$. □

Definice 4 *Nechť L je lin. prostor a B je báze. Pak dimenze L je počet prvků B, tj.* $\dim L = |B|$.

Věta 7 *Nechť L je lin. prostor a $M \subseteq L$ je jeho podprostor. Pak* $\dim M \leq \dim L$.

DŮKAZ: Nechť B_1 je báze M a B_2 je báze L. Protože B_1 je LN a $B_1 \subseteq \langle B_2 \rangle$, máme $\dim M = |B_1| \leq |B_2| = \dim L$. □

Věta 8 *Nechť L je lin. prostor, $M \subseteq L$, $\dim L = n$ a $|M| = m$. Pak platí:*

1. *Pokud M je LN, pak $m \leq n$.*
2. *Je-li $m > n$, pak M je LZ.*
3. *Je-li $m = n$. Pak M je LN p.t.k. $\langle M \rangle = L$.*

DŮKAZ:

1. Nechť B je báze L. Protože $M \subseteq \langle B \rangle$, je $m = |M| \leq |B| = n$ podle Důsledku 1.
2. Je ekvivalentní s předchozím bodem.
3. ($\Rightarrow$) Nechť M je LN. Pokud $\langle M \rangle \neq L$ pak $M \cup \{\boldsymbol{z}\}$ je LN pro nějaký $\boldsymbol{z} \notin \langle M \rangle$. To je ale spor s 1. tvrzením, protože $|M \cup \{\boldsymbol{z}\}| = n + 1 > n$. Tudíž $\langle M \rangle = L$.

   ($\Leftarrow$) Pokud $\langle M \rangle = L$ a M je LZ. Pak existuje báze $B \subseteq M$ a $|B| < |M| = n$. To je ale spor, protože všechny báze mají stejný počet prvků.

   Pozn.: M tedy musí být báze L.

□

2 Souřadnice v uspořádané bázi

Definice 5 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lin. prostoru L a $\boldsymbol{x} \in L$. Uspořádanou n-tici reálných čísel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ nazýváme souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k uspořádané bázi (B), pokud platí*

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n \,.$$

Věta 9 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lin. prostoru L. Pak pro každý $\boldsymbol{x} \in L$ souřadnice $\boldsymbol{x}$ vzhledem k bázi (B) existují a jsou určeny jednoznačně.*

DŮKAZ: Existence: každý $\boldsymbol{x} \in L$ lze vyjádřit jako lin. kombinaci bázových prvků.

Jednoznačnost sporem: nechť existují $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ a $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Pak

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{b}_n \,.$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o} \,.$$

Protože $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je LN, máme $\alpha_i - \beta_i = 0$. To ale znamená, že $\alpha_i = \beta_i$ (spor). □

Příklad $(B) = (1, x, x^2)$ je usp. báze lin. prostoru polynomů stupně nejvýše 2. Polynom $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ má v této bázi souřadnice $(5, -3, 2)$, t.j. $f(x) = 5 \cdot 1 + (-3) \cdot x + 2 \cdot x^2$.

Podle Věty 9 je možné každému vektoru přiřadit právě jednu uspořádanou n-tici reálných čísel (jeho souřadnice). Můžeme tedy definovat zobrazení, které vektoru $\boldsymbol{x}$ přiřadí jeho souřadnice v bázi (B). Budeme ho značit $[-]_B \colon L \to \mathbb{R}^n$, tj. pokud má vektor $\boldsymbol{x}$ v uspořádané bázi (B) souřadnice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pak $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Naopak, pokud $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze, pak zobrazení, které n-tici $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadí vektor $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n$ budeme značit $(-)_B \colon \mathbb{R}^n \to L$.

Ve výše uvedeném příkladu tedy máme $[f]_B = (5, -3, 2)$ a $(5, 3, -2)_B = f$.