1 Matice

Definice 1 *Matice* $\mathbf{A}$ *typu* (m,n) *je zobrazení z kartézského součinu* $\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}$ *do množiny* $\mathbb{R}$. *Matici* $\mathbf{A}$ *obvykle zapisujeme takto:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *jsou její prvky. Zkráceně zapisujeme také* $\mathbf{A} = (a_{ij})$. *Pokud* $m = n$, *pak nazýváme* $\mathbf{A}$ *čtvercovou.*

Definice 2 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *a* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *jsou matice typu* (m,n). *Pak součet* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ *a* α-*násobek* $\alpha\cdot\mathbf{A}$ *jsou matice typu* (m,n) *definovány jako pro zobrazení, tj.* $\mathbf{A}+\mathbf{B} = (a_{ij}+b_{ij})$ *a* $\alpha\cdot\mathbf{A} = (\alpha\, a_{ij})$.

Sčítání matic a skalární násobek tedy splňují všechny vlastnosti, které jsme uvedli pro zobrazení. Operaci násobení u matic budeme definovat jiným způsobem.

Důsledek 1 *Množina všech matic typu* (m,n) *tvoří se sčítáním matic a násobením matice reálným číslem lineární prostor. Nulový vektor v tomto prostoru je tzv. nulová matice, tj. matice samých nul.*

Definice 3 *Symbolem* $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$ *vyjadřujeme fakt, že matice* $\mathbf{B}$ *vznikla z matice* $\mathbf{A}$ *konečným počtem kroků Gaussovy eliminační metody.*

Věta 1 *Relace* $\sim$ *je symetrická, tj.* $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$ *p.t.k.* $\mathbf{B}\sim\mathbf{A}$.

DŮKAZ: Ukážeme, že každá elementární úprava z Gaussovy eliminační metody je invertovatelná:

1. Přehození dvou řádků. Stačí přehodit řadky ještě jednou.
2. Vynásobení i-tého řádku reálným číslem $\alpha \neq 0$. Stačí i-tý řádek vynásobit $\frac{1}{\alpha}$.
3. Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému. Stačí přičíst $-\alpha$-násobek k j-tému řádku.

□

Řádky matice typu (m,n) můžeme chápat, jako vektory z lin. prostoru $\mathbb{R}^n$. Takže má smysl mluvit o jejich lin. závislosti, nezávislosti, lineárním obalu atd. Podobně sloupce tvoří vektory z lin. prostoru $\mathbb{R}^m$.

Definice 4 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice typu* (m,n) *a* $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$ *jsou její řádky. Lineární obal množiny* $r:\mathbf{A} = \{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m\}$ *značíme* $\langle r:\mathbf{A}\rangle$.

Věta 2 *Jeli* $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$, *pak* $\langle r:\mathbf{A}\rangle = \langle r:\mathbf{B}\rangle$.

DŮKAZ: Věta stačí ukázat pro matici $\mathbf{B}$ vzniklou z $\mathbf{A}$ jen jednou elementární úpravou. Zřejmě všechny řádky matice $\mathbf{B}$ lze zapsat jako lineární kombinaci řádků z $\mathbf{A}$. Platí tedy, že všechny řádky $\mathbf{B}$ patří do $\langle r : \mathbf{A}\rangle$. Tedy $\langle r : \mathbf{B}\rangle \subseteq \langle\langle r : \mathbf{A}\rangle\rangle = \langle r : \mathbf{A}\rangle$. Protože relace $\sim$ je symetrická máme i $\langle r : \mathbf{A}\rangle \subseteq \langle r : \mathbf{B}\rangle$. $\square$

Definice 5 *Hodnost matice* $\mathbf{A}$ *značíme* $\operatorname{hod}\mathbf{A}$ *a definujeme* $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \dim\langle r : \mathbf{A}\rangle$.

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je tedy počet prvků v libovolné největší lineárně nezávislé podmnožině řádků matice $\mathbf{A}$.

Důsledek 2 *Je-li* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *pak* $\operatorname{hod}\mathbf{A} = \operatorname{hod}\mathbf{B}$.

Definice 6 *Nechť matice má* $\mathbf{A}$ *řádky* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$. *Nechť pro každé dva po sobě jdoucí řádky* $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}$ *platí: má-li řádek* $\boldsymbol{a}_i$ *prvních* k *složek nulových, pak má řádek* $\boldsymbol{a}_{i+1}$ *alespoň* $k+1$ *složek nulových nebo* $\boldsymbol{a}_{i+1} = \boldsymbol{o}$. *Pak* $\mathbf{A}$ *nazýváme horní trojúhelníkovou maticí.*

Věta 3 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *existuje horní trojúhelníková matice* $\mathbf{B}$ *t.ž.* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Věta 4 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je horní trojúhelníková matice typu* (m, n) *a* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *jsou její nenulové řádky. Pak konečná posloupnost* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *je LN.*

DŮKAZ: Vyřešme pro neznámé $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}\,.$$

Matice odpovídající soustavy lineárních rovnic bude mít vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ jako sloupce. Nechť $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Pak bude matice této soustavy vypadat např. nějak takto:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_{14} & a_{24} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{kn} & 0
\end{array}\right)$$

Takže $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. $\square$

Důsledek 3 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n), $\mathbf{B}$ *je horní trojúhelníková matice t.ž.* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ *a* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ *jsou nenulové řádky* $\mathbf{B}$. *Pak* $\langle r : \mathbf{A}\rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\rangle$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ *je jeho báze a* $\dim\langle r : \mathbf{A}\rangle = k$.

Příklad Najděte bázi a dimenzi lin. podprostoru $\langle r : \mathbf{A}\rangle$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tedy $\dim\langle r : \mathbf{A}\rangle = \operatorname{hod}\mathbf{A} = 3$.

Definice 7 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice typu* (m, n)*. Matici* $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$*, která je typu* (n, m) *nazveme transponovanou maticí k matici* $\mathbf{A}$*.*

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pozorování 1 *Pro matice* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *typu* (m, n) *platí:* $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ *a* $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$*.*

Věta 5 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *platí:* $\operatorname{hod} \mathbf{A}^T = \operatorname{hod} \mathbf{A}$*.*

Důsledek 4 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n)*. Pak* $\operatorname{hod} \mathbf{A} \leq \min\{m, n\}$*.*

Definice 8 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice typu* (m, n) *a* $\mathbf{B} = (b_{jk})$ *je matice typu* (n, p)*. Pak součin* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ik})$ *je matice typu* (m, p)*, kde*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\,.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ obecně neplatí (dokonce ani pro čtvercové matice).

Věta 6 *Nechť* $\alpha \in \mathbb{R}$ *a* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *jsou matice odpovídajících typů, aby níže uvedené výrazy byly definovány. Pak*

1. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$*,*
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$*,*
3. $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$*,*
4. $\alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{B})$*.*
5. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$*.*

Důkaz:

1. Označme g_{il} prvek matice $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ na pozici (i, l) a h_{il} prvek matice $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ na téže pozici. Pak

$$g_{il} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) = h_{il}\,.$$

2. Označme g_{ik} prvek matice $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ na pozici (i,k) a h_{ik} prvek matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ na téže pozici. Pak

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})\,c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{jk}+b_{ij}c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_{jk} = h_{ik}\,.$$

3. Obdobně jako předchozí bod.

4. Pro prvek na pozici (i,k) máme:

$$\alpha\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{ij})b_{jk} = \sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\alpha b_{jk})$$

5. Označme g_{ik} prvek matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ na pozici (i,k) a h_{ik} prvek matice $\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$ na téže pozici. Chceme tedy ukázat, že $g_{ki}=h_{ik}$.

$$g_{ki} = \sum_{j=1}^{n}a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}b_{ji}a_{kj} = \sum_{j=1}^{n}b'_{ij}a'_{jk} = h_{ik}\,,$$

kde b'_{ij} je prvek $\mathbf{B}^T$ na pozici (i,j) a a'_{jk} je prvek $\mathbf{A}^T$ na pozici (j,k). □

Definice 9 *Čtvercovou matici* $\mathbf{E}$ *typu* (n,n) *nazveme jednotkovou maticí, pokud*

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pozorování 2 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m,n) *a* $\mathbf{B}$ *typu* (n,p). *Pak*

1. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{A}$.

2. $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}$.

2 Inverzní matice

Definice 10 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je čtvercová matice typu* (n,n) *a* $\mathbf{E}$ *je jednotková matice stejného typu. Matici* $\mathbf{B}$ *typu* (n,n), *která splňuje* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$ *nazýváme inverzní maticí k matici* $\mathbf{A}$. *Matici* $\mathbf{B}$ *označujeme* $\mathbf{A}^{-1}$.

Věta 7 *Pokud k matici* $\mathbf{A}$ *existuje* $\mathbf{A}^{-1}$, *pak* $\mathbf{A}^{-1}$ *je určena jednoznačně.*

DŮKAZ: Sporem: předpokládáme, že $\mathbf{B},\mathbf{C}$ jsou dvě různé inverzní matice k matici $\mathbf{A}$. Pak

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}\,.$$

□

Definice 11 *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *se nazývá regulární, pokud* $\mathbf{A}^{-1}$ *existuje. V opačném případě ji nazýváme singulární.*

Věta 8 *Nechť* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *jsou regulární matice. Pak* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *je také regulární matice.*

Důkaz: Ukážeme, že $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ je inverzní matice k $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

$$(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

□

Dříve než si ukážeme, za jakých podmínek inverzní matice existuje a jak ji počítat, ukážeme si, že jednotlivé kroky Gaussovy eliminační metody lze chápat jako násobení vhodnými maticemi zleva.

Definice 12 *Nechť* $\mathbf{P}_U$ *je čtvercová matice, která vznikla z jednotkové matice* $\mathbf{E}$ *jednou elementární úpravou* U*. Takové matice budeme nazývat elementární.*

Věta 9 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n)*. Pak* $\mathbf{P}_U \cdot \mathbf{A}$ *je matice, která vznikne z* $\mathbf{A}$ *el. úpravou* U*.*

Důkaz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + \alpha a_{31} & a_{12} + \alpha a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

□

Důsledek 5 *Pokud* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$*, pak* $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$*, kde* $\mathbf{C}$ *je součin elementárních matic.*

Důkaz: Jednotlivé kroky Gaussovy el. metody můžeme vyjádřit pomocí el. matic, tj.

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_n \cdot (\mathbf{C}_{n-1} \cdots (\mathbf{C}_2 \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{A})) \cdots) = (\mathbf{C}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1} \cdots \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_1) \cdot \mathbf{A} \,.$$

□

Každá matice $\mathbf{A}$ lze tedy psát ve tvaru $\mathbf{C} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{C}$ je součin elementárních matic a $\mathbf{T}$ je horní trojúhelníková.