1 Výpočet inverzní matice

Věta 1 *Nechť $\mathbf{P}_U$ elementární matice vzniklá el. úpravou U. Pak je $\mathbf{P}_U$ regulární.*

Důkaz: Protože elementární úprava U je invertovatelná, existuje el. úprava U', která vrací změny U zpět, tj. $\mathbf{P}_{U'} \cdot \mathbf{P}_U = \mathbf{E}$. Je snadné si rozmyslet, že pokud nejprve provedeme s maticí $\mathbf{E}$ úpravu U', pak U vrací zase vše zpět, tj. $\mathbf{P}_U \cdot \mathbf{P}_{U'} = \mathbf{E}$. $\square$

Ukázky elementárních matic a jejich inverzí:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}_1^{-1} = \mathbf{P}_1\,,$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta 2 *Pokud $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$, pak $\mathbf{A}$ je regulární.*

Důkaz: Pokud $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$, pak $\mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$, kde $\mathbf{C}$ je součin el. matic. Tvrdíme, že $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$. Musíme tedy ještě ověřit, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$. Protože $\mathbf{C}$ je součin el. matic, které jsou regulární, $\mathbf{C}$ je také regulární, protože součin regulárních matic je regulární. Z rovnosti $\mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ po vynásobení $\mathbf{C}^{-1}$ zleva dostaneme, $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}$. To ale znamená, že $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$. $\square$

Předchozí věta nám dává návod, jak inverzní matici hledat. Pokud budeme schopni najít el. úpravy, které převedou zadanou matici na jednotkovou, pak součin odpovídajících el. matic nám dá matici inverzní. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (n, n) a $\mathbf{E}$ je jednotková matice stejného typu. Pokud $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$, pak můžeme $\mathbf{A}^{-1}$ najít pomocí Gaussovy eliminační metody následovně: $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) \sim (\mathbf{E} \mid \mathbf{B})$, tj. upravujeme obě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ stejnými el. úpravami tak, aby se $\mathbf{A}$ převedla na $\mathbf{E}$. Matice $\mathbf{E}$ se těmito úpravami převede na matici $\mathbf{B}$. Pak existuje součin el. matic $\mathbf{C}$ t.ž. $\mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}$. To ale znamená, že $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Z důkazu předchozí věty víme, že $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$.

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta 3 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je regulární matice typu* (n, n). *Pak* $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$.

Důkaz: Sporem: budeme předpokládat, že $\mathbf{A} \not\sim \mathbf{E}$ a $\mathbf{A}$ je regulární (tj. $\mathbf{A}^{-1}$ existuje). Víme, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, kde $\mathbf{B}$ je horní trojúhelníková. Ukážeme, že pokud $\mathbf{A} \not\sim \mathbf{E}$, pak $\mathbf{B}$ musí obsahovat nulový řádek. Kdyby ne, tak vzhledem k tomu, že $\mathbf{B}$ je typu (n, n), musí být na diagonále matice $\mathbf{B}$ nenulové prvky, protože každý následující řádek má na začátku alespoň o jednu nulu víc. Pak ale můžeme pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace ukázat, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \sim \mathbf{E}$, což je spor s naším předpokladem, že $\mathbf{A} \not\sim \mathbf{E}$. Skutečně, situace vypadá takto (symbol $\times$ označuje libovolné nenulové číslo a $\diamond$ libovolné číslo):

$$\begin{pmatrix} \times & \diamond & \diamond & \diamond & \diamond \\ 0 & \times & \diamond & \diamond & \diamond \\ 0 & 0 & \times & \diamond & \diamond \\ 0 & 0 & 0 & \times & \diamond \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \times & \diamond & \diamond & \diamond & 0 \\ 0 & \times & \diamond & \diamond & 0 \\ 0 & 0 & \times & \diamond & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \times & \diamond & \diamond & 0 & 0 \\ 0 & \times & \diamond & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

Alespoň poslední řádek matice $\mathbf{B}$ tedy musí být nulový. Pak

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

Protože $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, existuje regulární matice $\mathbf{C}$ (součin el. matic) t.ž. $\mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$. Vzhledem k tomu že předpokládáme, že $\mathbf{A}$ je také regulární, musí být regulární i $\mathbf{B}$, jelikož součin dvou regulárních matic je zase regulární matice, tj. $\mathbf{B}^{-1}$ existuje. Vynásobíme zprava rovnici (1) maticí $\mathbf{B}^{-1}$ a dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

což je ale spor. $\square$

Věta 4 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (n, n). *Pak* $\mathbf{A}$ *je regulární p.t.k.* $\operatorname{hod} \mathbf{A} = n$.

Důkaz: Pokud $\mathbf{A}$ je regulární, pak $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$, tj. $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathbf{E} = n$.

Pokud $\operatorname{hod} \mathbf{A} = n$, pak $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, kde $\mathbf{B}$ je horní trojúhelníková matice bez nulových řádků, tj. na diagonále má nenulové prvky. Pak je možné pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminační metody převést $\mathbf{B}$ na $\mathbf{E}$, tj. $\mathbf{B} \sim \mathbf{E}$. Zároveň, ale víme, že z $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$ plyne, že $\mathbf{A}$ je regulární. $\square$

2 Determinant

Definice 1 *Permutací množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *rozumíme libovolnou uspořádanou* n*-tici jejích prvků, kde se žádný prvek neopakuje. Množinu všech permutací* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *budeme značit* S_n.

Je dobře známo, že počet $|S_n| = n!$. Nechť $\pi = (j_1, \ldots, j_n) \in S_n$. Uspořádanou dvojici (j_i, j_k) nazveme inverzí v π, jestliže $i < k$ a $j_i > j_k$. Je-li p celkový počet inverzí v π, pak číslo $(-1)^p$ nazýváme znaménkem permutace π a značíme $\operatorname{sgn} \pi$.

Definice 2 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice typu* (n, n). *Determinantem matice* $\mathbf{A}$ *nazýváme číslo:*

$$\det \mathbf{A} = \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} .$$

Příklad

$$\operatorname{sgn}(1,2) = 1 , \qquad \operatorname{sgn}(2,1) = -1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Příklad

$$\operatorname{sgn}(1,2,3) = 1 , \qquad \operatorname{sgn}(2,3,1) = 1 , \qquad \operatorname{sgn}(3,1,2) = 1$$

$$\operatorname{sgn}(3,2,1) = -1 , \qquad \operatorname{sgn}(1,3,2) = -1 , \qquad \operatorname{sgn}(2,1,3) = -1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Věta 5 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je horní (dolní) trojúhelníková matice typu* (n, n). *Pak* $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

DŮKAZ: Předpokládejme, že $\mathbf{A}$ je horní trojúhelníková typu $(4, 4)$ (pro čtvercovou matici jiných rozměrů bude důkaz probíhat analogicky).

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

Jediný nenulový součin z definice determinantu je součin $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ odpovídající permutaci $(1, 2, 3, 4)$. Protože $\operatorname{sgn}(1, 2, 3, 4) = 1$, je důkaz hotov. □

Věta 6 *Nechť* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou matice typu* (n, n). *Pak* $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

Elementární úpravy Gaussovy eliminační metody:

U_1 – přehození řádků,

U_2 – vynásobení i-tého řádku reálným číslem $\alpha \neq 0$,

U_3 – přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému.

Věta 7 *Nechť* $\mathbf{P}_i$ *je el. matice vzniklá el. úpravou* U_i. *Pak*

$$\det \mathbf{P}_1 = -1 , \qquad \det \mathbf{P}_2 = \alpha , \qquad \det \mathbf{P}_3 = 1 .$$

Navíc $\det \mathbf{P}_i^T = \det \mathbf{P}_i$.

Důkaz:

$$\det \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \alpha \cdots 1 = \alpha$$

Protože $\mathbf{P}_2^T = \mathbf{P}_2$, platí i $\det \mathbf{P}_2^T = \det \mathbf{P}_2$.

$$\det \mathbf{P}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det \mathbf{P}_3^T$$

Všimeme si nejprve, že el. úprava U_1 lze udělat pouze pomocí el. úprav U_2 a U_3 takto:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že matici $\mathbf{P}_1$ můžeme vyjádřit jako součin $\mathbf{P}_1 = \mathbf{C}_4 \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E}$, kde $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$ jsou el. matice odpovídající el. úpravě U_3 a $\mathbf{C}_4$ el. matice odpovídající el. úpravě U_2 pro $\alpha = -1$. Takže $\det \mathbf{C}_1 = \det \mathbf{C}_2 = \det \mathbf{C}_3 = 1$ a $\det \mathbf{C}_4 = -1$. Použitím věty o determinantu součinu dostaneme:

$$\det \mathbf{P}_1 = \det(\mathbf{C}_4 \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E}) = \det \mathbf{C}_4 \cdot \det \mathbf{C}_3 \cdot \det \mathbf{C}_2 \cdot \det \mathbf{C}_1 \cdot \det \mathbf{E} = -1\,.$$

□

Věta 8 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n) *a* $\mathbf{A}_i$ *je matice, která vznikne z* $\mathbf{A}$ *el. úpravou* U_i. *Pak*

$$\det \mathbf{A}_1 = -\det \mathbf{A}\,, \qquad \det \mathbf{A}_2 = \alpha \cdot \det \mathbf{A}\,, \qquad \det \mathbf{A}_3 = \det \mathbf{A}\,.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}_1 &= \det(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{A}) = \det \mathbf{P}_1 \cdot \det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \\ \det \mathbf{A}_2 &= \det(\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{A}) = \det \mathbf{P}_2 \cdot \det \mathbf{A} = \alpha \cdot \det \mathbf{A} \\ \det \mathbf{A}_3 &= \det(\mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{A}) = \det \mathbf{P}_3 \cdot \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \end{aligned}$$

□

Důsledek 1 *Pokud má čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *dva stejné řádky, pak* $\det \mathbf{A} = 0$.

Důkaz:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 = -\det \mathbf{A} \;\Rightarrow\; 2 \cdot \det \mathbf{A} = 0 \;\Rightarrow\; \det \mathbf{A} = 0$$

□

Věta 9 *Pro každou čtvercovou matici* $\mathbf{A}$ *platí:* $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{T}$, kde $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_n$ je součin el. matic a $\mathbf{T}$ je horní trojúhelníková matice. Pak

$$\det \mathbf{A}^T = \det (\mathbf{C} \cdot \mathbf{T})^T = \det (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C}^T) = \det \mathbf{T}^T \cdot \det \mathbf{C}^T = \det \mathbf{C}^T \cdot \det \mathbf{T}^T . \qquad (2)$$

$$\det \mathbf{T}^T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \cdots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11} \cdots t_{nn} = \det \mathbf{T} .$$

Protože $\det \mathbf{C}_i^T = \det \mathbf{C}_i$, dostaneme

$$\begin{aligned} \det \mathbf{C}^T = \det (\mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_n)^T = \det (\mathbf{C}_n^T \cdots \mathbf{C}_1^T) = \det \mathbf{C}_n^T \cdots \det \mathbf{C}_1^T = \\ = \det \mathbf{C}_n \cdots \det \mathbf{C}_1 = \det \mathbf{C}_1 \cdots \det \mathbf{C}_n = \det (\mathbf{C}_1 \cdots \mathbf{C}_n) = \det \mathbf{C} . \end{aligned}$$

Dosazením do rovnice (2) dostaneme

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{C}^T \cdot \det \mathbf{T}^T = \det \mathbf{C} \cdot \det \mathbf{T} = \det (\mathbf{C} \cdot \mathbf{T}) = \det \mathbf{A} .$$

□

Důsledek 2 *Analogická věta k Větě 8 by platila i pro el. sloupcové úpravy.*

Příklad

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{vmatrix} = -16 \end{aligned}$$