1 Lineární prostory konečné dimenze

Definice 1 *Nechť L je lineární prostor konečné dimenze, M a N jsou jeho podprostory. Množinu $\langle M \cup N \rangle$ nazýváme spojením podprostorů M a N a značíme $M \vee N$.*

Spojení podprostorů $M \vee N$ je nejmenší lineární podprostor lin. prostoru L, který obsahuje M i N.

Věta 1 *Nechť L je lineární prostor konečné dimenze, M a N jsou jeho podprostory. Pak*

$$\dim M + \dim N = \dim (M \cap N) + \dim (M \vee N) .$$

2 Lineární zobrazení

Definice 2 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je zobrazení a $M \subseteq L_1$. Pak definujeme*

$$\mathcal{A}(M) = \{y \in L_2 \mid (\exists x \in M)(\mathcal{A}(x) = y)\} .$$

Říkáme, že zobrazení $\mathcal{A}$ je "na", pokud $\mathcal{A}(L_1) = L_2$. Říkáme, že zobrazení $\mathcal{A}$ je "prosté", pokud pro všechny $x_1, x_2 \in L_1$ t.ž. $x_1 \neq x_2$ platí $\mathcal{A}(x_1) \neq \mathcal{A}(x_2)$.

Definice 3 *Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory a $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je zobrazení. Zobrazení $\mathcal{A}$ nazýváme lineární, pokud pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$,
2. $\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$.

Ekvivalentně se dá pojem lineárního zobrazení zavést tak, že řekneme, že je to takové zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$, které pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňuje:

$$\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \beta \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) .$$

Pozorování 1 *Pro lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ platí $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \boldsymbol{o}_2$, kde $\boldsymbol{o}_1$ je nulový vektor L_1 a $\boldsymbol{o}_2$ nulový vektor L_2.*

Důkaz: Máme $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \mathcal{A}(0 \cdot \boldsymbol{x}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2$. $\square$

Příklad Nechť $\mathcal{A}_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované tak, že vektoru $\boldsymbol{x}$ přiřadí vektor otočený podle počátku o úhel φ. Pak $\mathcal{A}_\varphi$ je lineární zobrazení.

Příklad Nechť L_1 je lin. prostor všech diferencovatelných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a L_2 je lin. prostor všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Pak zobrazení $\mathcal{D}\colon L_1 \to L_2$ definované vztahem $\mathcal{D}(f) = f'$ je lineární zobrazení, protože

$$\mathcal{D}(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g) , \quad \mathcal{D}(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot \mathcal{D}(f) .$$

Definice 4 *Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory, $\boldsymbol{o}_2$ je nulový vektor v L_2 a $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množinu*

$$\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in L_1 \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2\}$$

nazýváme jádrem lineárního zobrazení $\mathcal{A}$.

Věta 2 *Jádro lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ tvoří lineární podprostor lin. prostoru L_1.*

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ker \mathcal{A}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}_2 + \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2\,.$$

Tzn. že $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ker \mathcal{A}$. Podobně

$$\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2\,,$$

tj. $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in \ker \mathcal{A}$. □

Věta 3 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množina $\mathcal{A}(L_1)$ tvoří lineární podprostor lin. prostoru L_2.*

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{A}(L_1)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existují $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_1$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$ a $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$. Takže $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$, tj. $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{A}(L_1)$. Podobně $\alpha \cdot \boldsymbol{y}_1 = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1)$, tj. $\alpha \cdot \boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{A}(L_1)$. □

Definice 5 *Defekt lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je definován jako* $\dim(\ker \mathcal{A})$ *a hodnost lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ je definována jako* $\dim \mathcal{A}(L_1)$. *Defekt $\mathcal{A}$ značíme* $\operatorname{def} \mathcal{A}$ *a hodnost $\mathcal{A}$ značíme* $\operatorname{hod} \mathcal{A}$.

Věta 4 *Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory, $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ je usp. báze L_1 a $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n \in L_2$. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$. Navíc*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n\,, \tag{1}$$

kde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ v bázi (B).

DŮKAZ: (1) Existence: ukážeme, že zobrazení definované vztahem (1) je lineární. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_1$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}_1$ v (B) a $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ souřadnice $\boldsymbol{x}_2$ v (B). Pak

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n + \beta_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \boldsymbol{b}_n = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \boldsymbol{b}_n\,,$$

$$\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1 = \gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n) = (\gamma\alpha_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) \cdot \boldsymbol{b}_n\,.$$

Tzn. že souřadnice $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ v (B) jsou $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ a souřadnice $\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1$ v (B) jsou $(\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n)$. Takže

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \boldsymbol{y}_n = \\ &= \alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n + \beta_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2)\,,\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1) = (\gamma\alpha_1) \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) \cdot \boldsymbol{y}_n = \gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n) = \gamma \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1)\,.$$

(2) Jednoznačnost: předpokládejme, že existuje lineární zobrazení $\mathcal{B}\colon L_1 \to L_2$ t.ž. $\mathcal{B}(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna i a $\boldsymbol{x} \in L_1$. Vektor $\boldsymbol{x}$ má nějaké souřadnice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ v (B). Pak

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n) = \alpha_1 \cdot \mathcal{B}(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \mathcal{B}(\boldsymbol{b}_n) = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})\,.$$

□

Příklad Vezměme příklad lin. zobrazení $\mathcal{A}_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a standardní bázi $(B) = ((1,0),(0,1))$. Je jednoduché ověřit, že $\mathcal{A}_\varphi(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a $\mathcal{A}_\varphi(0,1) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Pokud nás nyní zajímá obraz libovolného vektoru $(x,y) = x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1)$, pak podle předchozí věty máme:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\varphi(x,y) &= x\cdot\mathcal{A}_\varphi(1,0) + y\cdot\mathcal{A}_\varphi(0,1) = \\ &= x\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi) + y\cdot(-\sin\varphi,\cos\varphi) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)\,.\end{aligned}$$

Pozorování 2 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ je LZ posloupnost v L_1. Pak i $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ je LZ.*

Důkaz: Protože existuje netriviální lin. kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ t.ž.

$$\alpha_1\cdot\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\cdot\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}_1\,,$$

dostaneme

$$\alpha_1\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) = \mathcal{A}(\alpha_1\cdot\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\cdot\boldsymbol{x}_n) = \mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \boldsymbol{o}_2\,.$$

□

Věta 5 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$\mathcal{A}$ je prosté.*
2. $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$.
3. *Je-li $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ LN posloupnost v L_1, pak i $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ je LN.*

Důkaz:

(1⇒2) Je-li $\mathcal{A}$ prosté, pak $\ker\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}_1\}$, tj. $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$.

(2⇒3) Pokud $\operatorname{def}\mathcal{A} = 0$, pak $\ker\mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}_1\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1),\dots,\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ je LN. Řešme tedy rovnici:

$$\alpha_1\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}_2\,.$$

Z linearity $\mathcal{A}$ dostaneme:

$$\mathcal{A}(\alpha_1\cdot\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\cdot\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}_2\,,$$

tj. $\alpha_1\cdot\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\cdot\boldsymbol{x}_n \in \ker\mathcal{A}$. Takže $\alpha_1\cdot\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n\cdot\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}_1$. Protože $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ je LN, musí platit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(3⇒1) Nechť $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in L_1$ t.ž. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Pak $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}_1$, tj. $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ je LN. Proto $\boldsymbol{o}_2 \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$. Takže $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$.

□

Definice 6 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ jsou zobrazení. Symbolem $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}\colon L_1 \to L_3$ označujeme složené zobrazení, které je definováno $(\mathcal{B}\circ\mathcal{A})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}))$ pro všechny $\boldsymbol{x} \in L_1$.*

Věta 6 *Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *a* $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ *jsou lineární zobrazení. Pak i* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ *je lineární.*

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = \\ = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) + (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{y})\,,$$

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x})) = \mathcal{B}(\alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})) = \alpha \cdot \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})) = \alpha \cdot (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x})\,.$$

□

Definice 7 *Identické zobrazení* $\mathcal{I}\colon L \to L$ *je definováno* $\mathcal{I}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je prosté zobrazení na* L_2. *Pak inverzní zobrazení* $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$ *je takové zobrazení, které splňuje* $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}$.

Zobrazení $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$ *existuje právě jedno, je prosté a na.*

Věta 7 *Je-li prosté zobrazení* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *na* L_2 *lineární, pak* $\mathcal{A}^{-1}$ *je také lineární.*

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{a} \in L_1$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x}$ a právě jeden vektor $\boldsymbol{b} \in L_1$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}$. Takže $\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ a $\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}$. Navíc $\mathcal{A}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{a}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Takže

$$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y})\,.$$

Nakonec $\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x}$. Takže

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\,.$$

□

3 Izomorfní lineární prostory

Definice 8 *Zobrazení* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *nazýváme izomorfismus, pokud je prosté a na. Říkáme, že dva lineární prostory* L_1, L_2 *jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$. *Tento fakt značíme* $L_1 \cong L_2$.

Poznámka 1 *Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je izomorfismus. Pak* $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$ *existuje a je také izomorfismus.*

Věta 8 *Každý lineární prostor* L *dimenze* n *je izomorfní s lineárním prostorem* $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Protože $\dim L = n$, existuje usp. báze $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ lin. prostoru L. Definujme zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to \mathbb{R}^n$ takto: $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, kde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ v (B). Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je lineární. Nechť $\gamma \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ v (B) a $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{y}$ v (B). Pak

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n + \beta_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \boldsymbol{b}_n = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \boldsymbol{b}_n\,,$$

$$\gamma \cdot \boldsymbol{x} = \gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n) = (\gamma\alpha_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) \cdot \boldsymbol{b}_n \,.$$

Tzn. že souřadnice $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ v (B) jsou $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ a souřadnice $\gamma \cdot \boldsymbol{x}$ v (B) jsou $(\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n)$. Takže

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \;=\; (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \;=\; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) \;=\; \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})\,,$$

$$\mathcal{A}(\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1) = (\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n) = \gamma \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \gamma \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})\,.$$

Protože jsou souřadnice určeny jednoznačně, tak jediný vektor, který má v (B) souřadnice $(0, \ldots, 0)$ je $\boldsymbol{o}$. Tzn. že $\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, tj. $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$. Takže $\mathcal{A}$ je prosté. Nakonec $\mathcal{A}$ je i na, protože ke každé n-tici $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ existuje $\boldsymbol{x} \in L$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, konkrétně vektor $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n$. □

Definice 9 *Nechť L je lin. prostor, (B) jeho báze a $\dim L = n$. Pak $[\ ]_B \colon L \to \mathbb{R}^n$ je izomorfismus definovaný $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, kde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ v bázi (B). K němu inverzní izomorfismus budeme značit $(\ )_B \colon \mathbb{R}^n \to L$, tj. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_B = \boldsymbol{x}$.*

Příklad Nechť L je lin. prostor polynomů stupně nejvýše 2 a $(B) = (x^2, x, 1)$ je jeho báze. Pak L je izormorfní s $\mathbb{R}^3$ a

$$[a_2x^2 + a_1x + a_0]_B = (a_2, a_1, a_0)\,, \qquad (a_2, a_1, a_0)_B = a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Věta 9 *Nechť $\mathcal{A} \colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B} \colon L_2 \to L_3$ jsou izomorfismy. Pak i $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} \colon L_1 \to L_3$ je izomorofismus.*

Důkaz: Zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ je lineární. Navíc je i prosté, protože složení dvou prostých zobrazení je prosté. Ukážeme, že je na. Protože $\mathcal{A}(L_1) = L_2$ a $\mathcal{B}(L_2) = L_3$ máme

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(L_1) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(L_1)) = \mathcal{B}(L_2) = L_3\,.$$

□

Věta 10 *Dva lineární prostory L_1, L_2 konečné dimenze jsou izomorfní p.t.k. mají stejnou dimenzi.*

Důkaz: Nechť $\dim L_1 = \dim L_2 = n$. Pak $L_1 \cong \mathbb{R}^n$ a $L_2 \cong \mathbb{R}^n$, tj. existují izomorfismy $\mathcal{A} \colon L_1 \to \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{B} \colon L_2 \to \mathbb{R}^n$. Takže $\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A} \colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus.

Nechť $\mathcal{A} \colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus, B_1 je báze L_1 a B_2 báze L_2. Protože izomorfismus převádí LN vektory na LN vektory, máme $|B_1| = |\mathcal{A}(B_1)| \leq |B_2|$. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{A}^{-1}$ je také izomorfismus, máme $|B_2| = |\mathcal{A}^{-1}(B_2)| \leq |B_1|$. Takže $|B_1| = |B_2|$, tj. $\dim L_1 = \dim L_2$. □

4 Matice lineárního zobrazení

Pozorování 3 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n)*. Pak zobrazení* $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definované vztahem*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

je lineární.

Věta 11 *Nechť* L_1, L_2 *jsou lin. prostory,* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je báze* L_1 *a* $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$ *je báze* L_2*. Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je lineární zobrazení a* $\mathbf{A}$ *je matice, jejíž sloupce tvoří vektory* $[\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C, \ldots, [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C$*. Pak* $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$ *platí:*

$$[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B \,.$$

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x} \in L_1$ a $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tj. $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n$. Pak

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n) = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \,.$$

Protože $[\ ]_C$ je lineární zobrazení dostaneme:

$$[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = [\alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C = \alpha_1 [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C + \cdots + \alpha_n [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B \,.$$

□

Matici $\mathbf{A}$ z poslední věty říkáme matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C).

Lemma 1 *Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je linearní zobrazení a* $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in L_1$*. Pak*

$$\mathcal{A}(\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle) = \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) \rangle \,.$$

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{y} \in L_2$. Potom $\boldsymbol{y} \in \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) \rangle$ p.t.k. pro nějaké $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ máme

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) = \mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n) \,.$$

A to je ekvivalentní tvrzení, že $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle)$. □

Věta 12 *Nechť* L_1, L_2 *jsou lin. prostory konečné dimenze,* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je lineární zobrazení,* (B) *je báze* L_1 *a* (C) *je báze* L_2*. Pak pro matici* $\mathbf{A}$ *lin. zobr.* $\mathcal{A}$ *vzhledem k bázím* (B) *a* (C) *platí* $\operatorname{hod} \mathcal{A} = \operatorname{hod} \mathbf{A}$.

Důkaz: Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $\dim L_2 = m$. Pak

$$\operatorname{hod} \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}(L_1) = \dim \mathcal{A}(\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle) = \dim \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle \,.$$

Poslední rovnost plyne z předchozího lemmatu. Protože $[\ ]_C\colon L_2 \to \mathbb{R}^m$ je izomorfismus, je linearní obal $\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle$ izomorfní linearnímu prostoru $[\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle]_C$, což opět podle předchozího lemmatu je rovno linearnímu obalu $\langle [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C, \ldots, [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C \rangle$. Takže nakonec dostaneme následující rovnosti:

$$\dim \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle = \dim \langle [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C, \ldots, [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C \rangle = \operatorname{hod} \mathbf{A} \,.$$

□

Věta 13 *Nechť L_1, L_2 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lin. zobrazení. Pak*

$$\dim L_1 = \operatorname{hod} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A}\,.$$

DŮKAZ: Nechť $\dim L_1 = n$ a $\mathbf{A}$ je matice lin. zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C). Nulové vektory prostorů $L_1, L_2, \mathbb{R}^n$ budeme značit postupně $\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \boldsymbol{o}$. Protože $\operatorname{hod} \mathcal{A} = \operatorname{hod} \mathbf{A}$, stačí ukázat, že $\operatorname{def} \mathcal{A} = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Nechť $M_0 = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}\}$. Víme, že $\dim M_0 = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Ukážeme, že $M_0 \cong \ker \mathcal{A}$, tj. $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} = \dim M_0 = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Stačí tedy najít izomorfismus z $\ker \mathcal{A}$ na M_0. Ukážeme, že zobrazení $\mathcal{B}\colon \ker \mathcal{A} \to M_0$ definované předpisem $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_B$, je onen izomorfismus. Zobrazení $\mathcal{B}$ je tedy jen restrikce zobrazení $[\ ]_B\colon L_1 \to \mathbb{R}^n$ na menší definiční obor $\ker \mathcal{A}$. Zobrazení $\mathcal{B}$ je tedy prosté. Zbývá ukázat, že (1) M_0 je jeho obor hodnot (tj. $\mathcal{B}(\ker \mathcal{A}) \subseteq M_0$) a (2) $\mathcal{B}$ je na M_0.

(1) Nechť $\boldsymbol{x} \in \ker \mathcal{A}$. Pak $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2$. Takže

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B = [\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = [\boldsymbol{o}_2]_C = \boldsymbol{o}\,,$$

tj. $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \in M_0$.

(2) Nechť $\boldsymbol{u} \in M_0$. Pokud ukážeme, že $(\boldsymbol{u})_B \in \ker \mathcal{A}$, tak máme vyhráno, protože $\mathcal{B}((\boldsymbol{u})_B) = [(\boldsymbol{u})_B]_B = \boldsymbol{u}$ (zobrazení $[\ ]_B$ a $(\ )_B$ jsou vzájemně inverzní izomorfismy). Máme

$$[\mathcal{A}((\boldsymbol{u})_B)]_C = \mathbf{A} \cdot [(\boldsymbol{u})_B]_B = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}\,.$$

Aplikací izomorfismu $(\ )_C$ a předchozí rovnosti, dostaneme

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{u})_B) = \big([\mathcal{A}((\boldsymbol{u})_B)]_C\big)_C = (\boldsymbol{o})_C = \boldsymbol{o}_2\,,$$

tj. $(\boldsymbol{u})_B \in \ker \mathcal{A}$.

□

Věta 14 *Nechť L_1, L_2, L_3 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ jsou lin. zobrazení. Dále nechť $(B), (C), (D)$ jsou postupně báze L_1, L_2, L_3, $\mathbf{A}$ je matice $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C), a $\mathbf{B}$ je matice $\mathcal{B}$ vzhledem k bázím (C) a (D). Pak matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ je matice lin. zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (D).*

DŮKAZ: Musíme ukázat, že sloupce matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ jsou obrazy bázových vektorů z (B) vyjádřené v bázi (D) přes zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Pak

$$[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i))]_D = \mathbf{B} \cdot [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)]_C = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B\,.$$

Protože $[\boldsymbol{b}_i]_B = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ je vektor samých nul, akorát na i-té pozici je 1. Dostaneme, že $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B$ není nic jiného než i-tý sloupec matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. □

Věta 15 *Nechť L_1, L_2 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus a $\mathbf{A}$ je matice $\mathcal{A}$ vzhedem k bázím (B) a (C). Pak $\mathbf{A}^{-1}$ existuje a je maticí $\mathcal{A}^{-1}$ vzhledem k bázím (C) a (B).*

Důkaz: Když je $\mathcal{A}$ je izomorfimus, pak $\dim L_1 = \dim L_2 = n$ a $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$. Takže $\mathbf{A}$ je typu (n, n) a je regulární, protože $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathcal{A} = \dim L_1 - \operatorname{def} \mathcal{A} = n$. Nechť $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. Ukážeme, že i-tý sloupce matice $\mathbf{A}^{-1}$ je roven $[\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i)]_B$. Máme

$$\mathbf{A} \cdot [\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i)]_B = [\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i))]_C = [\boldsymbol{c}_i]_C\,.$$

Po vynásobení poslední rovnosti maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme:

$$[\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i)]_B = \mathbf{A}^{-1} \cdot [\boldsymbol{c}_i]_C\,.$$

Protože $[\boldsymbol{c}_i]_C = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ je vektor samých nul, akorát na i-té pozici je 1. Dostaneme, že $(\mathbf{A}^{-1}) \cdot [\boldsymbol{c}_i]_C$ není nic jiného než i-tý sloupec matice $\mathbf{A}^{-1}$. □

5 Transformace souřadnic

Věta 16 *Nechť L je lin. prostor konečné dimenze, $\mathcal{I}\colon L \to L$ je identické zobrazení a $(B), (C)$ jsou dvě báze L. Pak pro matici $\mathbf{I}$ lin. zobrazení $\mathcal{I}$ vzhledem k bázím (B) a (C) platí:*

$$[\boldsymbol{x}]_C = \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_B\,,$$

pro každý $\boldsymbol{x} \in L$.

Důkaz:

$$[\boldsymbol{x}]_C = [\mathcal{I}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_B\,.$$

□

Matice $\mathbf{I}$ tedy přepočítává souřadnice z báze (B) do báze (C). Navíc $\mathbf{I}$ je typu (n, n), kde $n = \dim L$.

Definice 10 *Matice $\mathbf{I}$ z předchozí věty se nazývá matice přechodu od báze (C) k bázi (B).*

Pořadí bází v definici matice přechodu je motivováno následujícím faktem. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Pak i-tý sloupec matice $\mathbf{I}$ je $[\mathcal{I}(\boldsymbol{b}_i)]_C = [\boldsymbol{b}_i]_C$, tj. pokud známe bázi (C), pak sloupce matice $\mathbf{I}$ nám říkají, jak najít bázové vektory z (B).

Věta 17 *Nechť L je lin. prostor konečné dimenze n, $\mathcal{I}\colon L \to L$ je identické zobrazení a $(B), (C)$ jsou dvě báze L. Pak matice přechodu $\mathbf{I}$ od báze (C) k bázi (B) je regulární a matice $\mathbf{I}^{-1}$ je matice přechodu od báze (B) k bázi (C).*

Důkaz: Protože $\mathcal{I}$ je izomorfismus, je matice $\mathbf{I}$ regulární. Navíc podle Věty 15 je $\mathbf{I}^{-1}$ maticí lin. zobrazení $\mathcal{I}^{-1}$ vzhledem k bázím (C) a (B). Protože $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}$, je matice $\mathbf{I}^{-1}$ maticí přechodu od báze (B) k bázi (C). □