1 Skalární součin

Definice 1 *Nechť L je lineární prostor. Operaci $\cdot\colon L \times L \to \mathbb{R}$ nazveme skalárním součinem, pokud $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ splňuje tyto vlastnosti:*

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$
3. $(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$
4. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ *a* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ *p.t.k.* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Lineární prostor, na kterém byl definován skalární součin, nazýváme lineárním prostorem se skalárním součinem.

Příklad Nechť $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Jestliže definujeme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$, pak $\cdot$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Tento skalární součin nazýváme standardní.

Příklad Nechť $\boldsymbol{x} = (\alpha_2, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Jestliže definujeme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

pak $\cdot$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$.

Věta 1 *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$ platí:*

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x} = 0,$
2. $\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}.$

Důkaz:

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x} = (0 \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = 0 \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = 0,$
2. $\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}.$

$\square$

Definice 2 *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. Pro $\boldsymbol{x} \in L$ definujeme jeho velikost $|\boldsymbol{x}|$ hodnotou $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$, tj. $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$.*

Pozorování 1 *Máme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$, takže $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ je definováno a $|\boldsymbol{x}| = 0$ p.t.k. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.*

Věta 2 *Nechť $\boldsymbol{x}$ je prvkem lineárního prostoru se skalárním součinem a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $|\alpha \cdot \boldsymbol{x}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{x}|$.*

Důkaz: $|\alpha \cdot \boldsymbol{x}| = \sqrt{(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x})} = \sqrt{\alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x}))} = \sqrt{\alpha \cdot ((\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x})} = \sqrt{\alpha \cdot (\alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}))} = \sqrt{\alpha^2 \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})} = |\alpha| \cdot \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{x}|.$ $\square$

Věta 3 (Schwartzova nerovnost) *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$. Pak $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$.*

DŮKAZ: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$0 \leq (\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \alpha \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - \alpha \cdot 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \alpha^2 \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}) \,.$$

Označme $A = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{y}|^2$, $B = -2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ a $C = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2$. Takže

$$0 \leq A\alpha^2 + B\alpha + C \,.$$

Protože tato nerovnost platí pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, diskriminant $A\alpha^2 + B\alpha + C$ nemůže být kladný, tj. $B^2 - 4AC \leq 0$. Takže $B^2 \leq 4AC$. Protože $B^2 = (-2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})) = 4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2$ a $4AC = 4|\boldsymbol{x}|^2 \cdot |\boldsymbol{y}|^2$, dostaneme $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq |\boldsymbol{x}|^2 \cdot |\boldsymbol{y}|^2$, tj. $\sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2} \leq \sqrt{|\boldsymbol{x}|^2}\sqrt{|\boldsymbol{y}|^2}$. Takže $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$. $\square$

Věta 4 (Trojúhelníková nerovnost) *Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou prvky lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.*

DŮKAZ: $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2\cdot\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \leq |\boldsymbol{x}|^2+2\cdot|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2 = (|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2$. $\square$

Definice 3 *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Pak uhel φ mezi $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je definován vztahem:*

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} \,.$$

Pozorování 2 *Díky Schwartzově nerovnosti máme*

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} \leq 1 \,.$$

Definice 4 *Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou prvky lineárního prostoru se skalárním součinem t.ž. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Pak říkáme, že $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou na sebe kolmé (značíme $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$), pokud $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.*

Definice 5 *Nechť $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Bázi B nazýváme ortogonální, pokud $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ pro $i \neq j$. Pokud navíc pro všechna i platí $|\boldsymbol{b}_i| = 1$, pak nazýváme bázi B ortonormální.*

Věta 5 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je ortonormální uspořádaná báze lineárního prostoru L se skalárním součinem. Pak pro všechny $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ t.ž. $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a $[\boldsymbol{y}]_B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ platí:*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n \,.$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \cdot + \alpha_n\boldsymbol{b}_n) \cdot (\beta_1\boldsymbol{b}_1 + \cdot + \beta_n\boldsymbol{b}_n) = \\
&= \alpha_1\beta_1\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \alpha_1\beta_2\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_1\beta_n\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_n + \alpha_2\beta_1\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\beta_2\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n\boldsymbol{b}_n \cdot \boldsymbol{b}_n = \\
&= \alpha_1\beta_1 \cdot 1 + \alpha_1\beta_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_1\beta_n \cdot 0 + \alpha_2\beta_1 \cdot 0 + \alpha_2\beta_2 \cdot 1 + \cdots + \alpha_n\beta_n \cdot 1 = \\
&= \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n \,.
\end{aligned}$$

$\square$

Důsledek 1 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální uspořádaná báze lineárního prostoru* L *se skalárním součinem a* $\boldsymbol{x} \in L$ *t.ž.* $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *Pak* $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$.

Příklad Nechť $\mathbb{R}^n$ je lineární prostor se standardním skalárním součinem. Pak standardní báze $\mathbb{R}^n$, tj. $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$ je ortonormální.

Tvrzení 1 *Nechť* $\mathbb{R}^3$ *je lineární prostor se standarním skalárním součinem,* $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ *a* $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$. *Pak* $|\boldsymbol{x}|$ *odpovídá velikosti vektoru* $\boldsymbol{x}$ *(tj. vzdálenosti bodu* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *od bodu* $(0,0,0)$*) a* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\varphi$, *kde* φ *je úhel, který svírají přímky dané vektory* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ *(tj. úhel definovaný pomocí skalárního součinu na začátku je skutečně úhel mezi vektory).*

DŮKAZ: Podle Důsledku 1 je $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, což je ale skutečně velikost podle Pythagorovy věty.

Nechť T je trojúhelník určený body $(0,0,0)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ a $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$. Velikosti vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ odpovídají velikostem stran trojúhelníka T. Z kosinovy věty dostaneme $|\boldsymbol{z}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají strany dané vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Máme

$$|\boldsymbol{z}|^2 = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2 .$$

Dosadíme-li do vztahu z kosinovy věty dostaneme:

$$|\boldsymbol{x}|^2 - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\varphi ,$$

z čehož plyne, že $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\varphi$. $\square$

Věta 6 *Nechť* $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ *jsou navzájem kolmé nenulové vektory lineárního prostoru se skalárním součinem, tj.* $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0$ *pro* $i \neq j$ *a* $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i > 0$. *Pak konečná množina* $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ *je lineárně nezávislá.*

DŮKAZ: Řešme rovnici

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o} .$$

Vynásobíme-li skalárně obě strany rovnice vektorem $\boldsymbol{x}_i$, dostaneme $\alpha_i \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x}_i = 0$, protože $\boldsymbol{x}_j \cdot \boldsymbol{x}_i = 0$ pro $i \neq j$. Protože $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i > 0$, musí být $\alpha_i = 0$. Aplikujeme-li tento postup pro všechny $i \in \{1, \ldots, n\}$, dostaneme $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. $\square$

Věta 7 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak pro souřadnice libovolného vektoru* $\boldsymbol{x}$ *platí:*

$$[\boldsymbol{x}]_B = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n) .$$

DŮKAZ: Necht $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{b}_n$. Ukážeme, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b}_i = ((\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{b}_n) \cdot \boldsymbol{b}_i = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i ,$$

protože $\boldsymbol{b}_j \cdot \boldsymbol{b}_i = 0$ pro $i \neq j$ a $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = 1$. Z předchozí rovnosti plyne $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{b}_i = 0$. Takže $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \perp \boldsymbol{b}_i$ pro všechny $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pokud $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, pak podle předchozí věty je množina $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\}$ lineárně nezávislá. Potom ale (B) není báze (spor). Takže $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. $\square$

Důsledek 2 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem a* $\boldsymbol{x}$ *je jeho vektor. Pokud* $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*, pak pro úhel* φ_i *mezi vektory* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{b}_i$ *platí:*

$$\cos\varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\boldsymbol{x}|}\,.$$

DŮKAZ:

$$\cos\varphi_i = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}_i}{|\boldsymbol{x}|\cdot|\boldsymbol{b}_i|} = \frac{\alpha_i}{|\boldsymbol{x}|}\,.$$

□

Věta 8 (Schmidtův ortogonalizační proces) *Nechť* L *je lineární prostor konečné dimenze se skalárním součinem. Pak v* L *existuje ortonormální báze.*

2 Eukleidovský prostor

V následujícím budeme pracovat s eukleidovským prostorem $\mathbb{E}_3$, kterých v jistém smyslu aproximuje náš třírozměrný prostor. Prostor $\mathbb{E}_3$ se sestává z bodů, mezi kterými jsme schopni měřit vzdálenost, každé dva body určují právě jednu přímku, mezi dvěmi přímkami, které se protínají v jednom bodě, můžeme měřit úhel. V prostoru $\mathbb{E}_3$ můžeme také zavést kartézskou souřadnou soustavu a všechny body popsat pomocí souřadnic v této souřadné soustavě. Teorie eukleidovských prostorů se obvykle staví na geometrických pojmech, nicméně v našem zkráceném přístupu rovnou ztotožníme body $\mathbb{E}_3$ s trojicemi souřadnic v nějaké kartézské souřadné soustavě.

Definice 6 *Eukleidovský prostor* $\mathbb{E}_3$ *je množina uspořádaných trojic reálných čísel. Prvek* $P = (x, y, z)$ *prostoru* $\mathbb{E}_3$ *se nazývá bod. Bod* $(0, 0, 0)$ *značíme* O.

Definice 7 *Nechť* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *a* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *jsou body* $\mathbb{E}_3$*. Pak definuje vektor* $\overrightarrow{AB}$ *jako uspořádanou trojici* $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \in \mathbb{R}^3$*. Vektor* $\overrightarrow{OA}$ *nazýváme rádiusvektorem bodu* A*. V případě, že nebudeme referovat u vektoru ke konkrétním bodům, budeme vektory značit malými písmeny* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots$

Definice 8 *Nechť* $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{E}_3$ *a vektor* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$*. Pak* $A + \boldsymbol{v}$ *značí bod* $(a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$*. Dále nechť* $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{E}_3$*. Pak* $B - A$ *značí vektor* $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Je zřejmé, že námi definované vektory splňují následující vlastnosti:

1. $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{o}$ p.t.k. $A = B$,
2. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$,
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,
4. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = C - B$,
5. když $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ je vektor a A je bod, pak existuje právě jeden bod B t.ž. $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$, konkrétně je to bod $A + \boldsymbol{u}$.

Připomeňme, že na $\mathbb{R}^3$ můžeme definovat skalární součin jako $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Můžeme tedy mluvit o velikostech a úhlech mezi vektory. Dále vektory $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ tvoří uspořádanou ortonormální bázi.

Definice 9 *Nechť (B) a (C) jsou uspořádané báze $\mathbb{R}^3$. Pak (B) a (C) nazýváme souhlasně orientované pokud $\det \mathbf{I} > 0$, kde $\mathbf{I}$ je matice přechodu od báze (B) k bázi (C) a jinak nesouhlasně orientované.*

Věta 9 *Množinu uspořádaných bází na $\mathbb{R}^3$ lze rozdělit na dvě disjunktní části, které obsahují jen souhlasně orientované báze.*

Důkaz: Zvolme jednu uspořádanou bázi (B) a rozdělme množinu bází na část, kde jsou souhlasně orientované báze s B a na část, kde jsou nesouhlasně orientované. Ukážeme, že v obou částech jsou libovolné dvě usp. báze souhlasně orientované. Nechť (C) a (D) jsou usp. báze souhlasně orientované s (B). Pro matici přechodu $\mathbf{I}_1$ od (B) k (C) platí $\det \mathbf{I}_1 > 0$. Podobně $\det \mathbf{I}_2 > 0$, kde $\mathbf{I}_2$ je matice přechodu od (B) k (D). Matice přechodu od (C) k (D) je matice $\mathbf{I}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_2$. Protože $\det(\mathbf{I}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_2) = \det \mathbf{I}_1^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 = (\det \mathbf{I}_1)^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 > 0$, jsou (C) a (D) souhlasně orientované. Podobně pokud jsou (C) a (D) nesouhlasně orientované, pak $\det \mathbf{I}_1 < 0$ a $\det \mathbf{I}_2 < 0$. Takže opět platí $\det(\mathbf{I}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_2) = \det \mathbf{I}_1^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 = (\det \mathbf{I}_1)^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 > 0$. □

Definice 10 *Orientovat libovolný lin. prostor konečné dimenze znamená prohlásit jednu jeho uspořádanou bázi (B) za kladně orientovanou. Uspořádaná báze (C) se pak nazývá kladně orientovaná, pokud je souhlasně orientovaná s (B) a záporně orientovaná, pokud nesouhlasně.*

Definice 11 *Vektorový součin $\times\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení, které splňuje následující vlastnosti:*

- *Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LZ, pak $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$.*
- *Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LN, pak $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je určen následovně:*
  1. *$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}$ a $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{v}$,*
  2. *$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin \varphi$, kde φ je úhel mezi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$,*
  3. *$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ je kladně orientovaná báze.*

Pozorování 3 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ je kladně orientovaná ortonormální báze. Pak*

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}\,,$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}\,.$$

Věta 10 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ je kladně orientovaná ortonormální báze a $[\boldsymbol{u}]_B = (u_1, u_2, u_3)$ a $[\boldsymbol{v}]_B = (v_1, v_2, v_3)$. Pak*

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]_B = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

DŮKAZ: Pokud je $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LN, pak všechny výše uvedené determinanty jsou nulové a výsledný vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ má nulové souřadnice, takže je v souladu s definicí nulový. Zbývá tedy ověřit vlastnosti 1 až 3 z definice vektorového součinu pro případ, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou lineárně nezávislé.

1. Ověříme $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}$. Dva vektory jsou kolmé, pokud jejich skalární součin je nulový.

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot u_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

   Podobně se ověří $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{v}$.

2.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 = \\ &= |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \cos^2 \varphi = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \sin^2 \varphi\,. \end{aligned}$$

3. Protože $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je nenulový pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LN a kolmý na oba vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ tvoří uspořádanou bázi. Matice přechodu od báze (B) k bázi $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ vypadá takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_2 & v_2 & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_3 & v_3 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

   Rozvojem podle třetího sloupce dostaneme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 > 0\,.$$

   Báze $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ je tedy kladně orientovaná.

$\square$

Výpočet vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ si lze snadno zapamatovat následovně:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix},$$

kde determinant vypočítáme rozvojem podle posledního řádku.

Věta 11 *Vektorový součin splňuje následující vlastnosti:*

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, *2.* $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$,

3. $(\alpha \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times (\alpha \boldsymbol{v})$,

4. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$,

5. $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$.

Příklad

$$\begin{aligned}
(2\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{u} + 3\boldsymbol{v}) &= (2\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u} + (2\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{v}) = \\
&= (2\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{u} + (-5\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{u} + (2\boldsymbol{u}) \times (3\boldsymbol{v}) + (-5\boldsymbol{v}) \times (3\boldsymbol{v}) = \\
&= 2(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}) - 5(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) + 6(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - 15(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}) = \\
&= 2\boldsymbol{o} - 5(-\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) + 6(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) - 15\boldsymbol{o} = 11(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})\,.
\end{aligned}$$

Věta 12 *Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ je LN. Pak $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ je rovna ploše rovnoběžníka určeného stranami $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.*

DŮKAZ: Platí $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\varphi$. Plocha rovnoběžníka je rovna součinu základny $|\boldsymbol{u}|$ a výšky, což je právě $|\boldsymbol{v}| \sin\varphi$. □

Definice 12 *Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$. Pak číslo $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ nazýváme smíšeným součinem vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ (v tomto pořadí).*

Věta 13 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ je kladně orientovaná ortonormální báze a $[\boldsymbol{u}]_B = (u_1, u_2, u_3)$, $[\boldsymbol{v}]_B = (v_1, v_2, v_3)$, $[\boldsymbol{w}]_B = (w_1, w_2, w_3)$. Pak*

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

DŮKAZ: Rozvojem determinantu podle 1.řádku dostaneme přímo skalární součin $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$. □

Věta 14 *Absolutní hodnota smíšeného součinu lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ je rovna objemu rovnobežnostěnu určeného svými stranami $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$.*

DŮKAZ: Velikost $|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|$ je rovna ploše rovnoběžníka určeného vektory $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, tj. plocha podstavy. Máme tedy

$$|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})| = |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}||\boldsymbol{u}|| \cos\varphi| = \text{základna} \cdot \text{výška} = \text{objem}\,.$$

Číslo $|\boldsymbol{u}|| \cos\varphi|$ je rovno požadované výšce, protože se jedná o kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{u}$ na vektor $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ a vektor $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ je kolmý na základnu. □