1 Analytická geometrie

1.1 Přímky

Nechť $A \in \mathbb{E}_3$ a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový. Pak

$$p = A + \langle \boldsymbol{v} \rangle = \{X \in \mathbb{E}_3 \mid X = A + t\boldsymbol{v},\ t \in \mathbb{R}\}\,,$$

je přímka procházející bodem A se směrovým vektorem $\boldsymbol{v}$. Rovnici

$$X = A + t\boldsymbol{v}\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

říkáme bodová rovnice přímky p. Nechť $X = (x, y, z)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak po dosazení do bodové rovnice dostaneme tvz. parametrické rovnice přímky p:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tv_1\,, \\ y &= a_2 + tv_2\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \\ z &= a_3 + tv_3\,, \end{aligned}$$

Eliminujeme-li parametr t z parametrických rovnic dostaneme tzv. kanonickou rovnici přímky p:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}\,.$$

Zlomky v kanonické rovnici je třeba chápat jen formálně, protože některé v_i může být nulové.

Příklad (Vzdálenost bodu od přímky) Nechť p je přímka s bodovou rovnicí $X = A + t\boldsymbol{u}$, $r \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{E}_3$. Spočtěme vzdálenost d bodu B od přímky p. Tato vzdálenost je rovna výšce rovnoběžníka určeného stranami $\boldsymbol{u}$ a $\overrightarrow{AB}$. Zakladna má velikost $|\boldsymbol{u}|$. Platí tedy:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|}\,.$$

1.2 Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť p je přímka s bodovou rovnicí $X = A + t\boldsymbol{u}$, $r \in \mathbb{R}$ a q je přímka s bodovou rovnicí $Y = B + s\boldsymbol{v}$, $s \in \mathbb{R}$. Vzájemnou polohu přímek p, q rozlišíme podle následujících případů:

1. Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \overrightarrow{AB}$ LN posloupnost, pak p, q jsou mimoběžné.
2. Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \overrightarrow{AB}$ LZ posloupnost, pak p, q leží v jedné rovině.
   a) Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LN posloupnost, pak p, q jsou různoběžné.
   b) Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LZ posloupnost, pak p, q jsou rovnoběžné nebo splývají.

Podle toho, který případ nastane, se obvykle dopočítávají následující hodnoty:

Vzdálenost dvou mimoběžek d počítáme z objemu rovnoběžnostěnu určeného stranami $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \overrightarrow{AB}$, který se rovná součinu plochy jeho základny (tj. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$) a jeho výšky (což je hledaná vzdálenost d). Protože můžeme tento objem spočíst také pomocí smíšeného součinu jako $|\overrightarrow{AB} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})|$, dostaneme:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}\,.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžek d počítáme jako vzdálenost bodu ležící na jedné rovnoběžce od druhé rovnoběžky, tj. např.

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|}\,.$$

Úhel φ **mezi různoběžkami** spočítáme pomocí úhlu ψ mezi vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Máme tedy

$$\cos\psi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\,.$$

Úhel φ pak určíme takto:

$$\varphi = \begin{cases} \psi & \text{jestliže } \psi \in \langle 0, \pi/2 \rangle\,, \\ \pi - \psi & \text{jestliže } \psi \in (\pi/2, \pi \rangle\,. \end{cases}\,.$$

Vzorec můžeme ještě zjednodušit. Pro $\psi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ platí $\cos\varphi = \cos\psi = |\cos\psi|$, protože funkce cos je na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ nezáporná. Pro $\psi \in (\pi/2, \pi\rangle$ máme $\cos\varphi = \cos(\pi - \psi) = \cos\pi\cos\psi + \sin\pi\sin\psi = -\cos\psi = |\cos\psi|$, protože funkce cos je na intervalu $(\pi/2, \pi\rangle$ záporná. V obou případech máme $\cos\varphi = |\cos\psi|$, takže dostaneme:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\,.$$

Souřadnice průsečíku různoběžek spočítáme jako společné řešení bodových rovnic přímek p a q, tj. $A + t\boldsymbol{u} = B + s\boldsymbol{v}$ pro neznámé parametry $t, s \in \mathbb{R}$. Tato rovnice vede na soustavu lineárních rovnic $t\boldsymbol{u} - s\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AB}$.

1.3 Roviny

Nechť $A \in \mathbb{E}_3$ a $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ je LN podmnožina. Pak

$$\varrho = A + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \{X \in \mathbb{E}_3 \mid X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v},\ t, s \in \mathbb{R}\}\,,$$

je rovina procházející bodem A se směrovými vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Podobně jako u přímky rovnice

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v},\ t, s \in \mathbb{R}\,,$$

se říká bodová rovnice roviny ϱ. Nechť $X = (x, y, z)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak po dosazení do bodové rovnice dostaneme tzv. parametrické rovnice roviny ϱ:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1\,, \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2\,, \qquad t, s \in \mathbb{R}\,. \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3\,, \end{aligned}$$

Jinou možností jak popsat rovinu ϱ je pomocí normálového vektoru $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ (tj. libovolného nenulového vektoru, který je kolmý na rovinu ϱ) a bodu $A = (a_1, a_2, a_3)$, kterým rovina ϱ prochází. Rovina ϱ je pak množina všech bodů $X = (x, y, z)$, které splňují:

$$\overrightarrow{AX} \perp \boldsymbol{n} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (a, b, c) = 0\,.$$

Pokud spočítáme skalární součin v poslední rovnici a označíme $d = -aa_1 - ba_2 - ca_3$ dostanem tzv. skalární rovnici roviny ϱ:

$$ax + by + cz + d = 0\,.$$

Pokud máme zadanou bodovou rovnici roviny ϱ: $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v},\ t, s \in \mathbb{R}$, můžeme přejít ke skalární rovnici takto. Jeden bod ležící v rovině ϱ odečteme přímo z bodové rovnice (je to bod A) a normálový vektor pak najdeme jako vektorový součin $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Existuje alternativní způsob, jak najít skalární rovnici roviny ϱ. Vektory $\overrightarrow{AX}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ musí totiž ležet v rovině ϱ. Tudíž musí tvořit LZ posloupnost. Tzn. že determinant matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi vektorů $\overrightarrow{AX}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ musí být nulový, tj.:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Výpočtem tohoto determinantu dostaneme také skalární rovnici roviny ϱ, protože tento determinant je smíšený součin $\overrightarrow{AX} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ a $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je normálový vektor roviny ϱ.

Příklad (Vzdálenost bodu od roviny) Nechť ϱ je rovina s bodovou rovnicí $X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$, $r, s \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{E}_3$. Spočtěme vzdálenost h bodu B od roviny ϱ. Vzdálenost h spočítáme z objemu rovnoběžnostěnu určeného stranami $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \overrightarrow{AB}$, který se rovná součinu plochy jeho základny (tj. $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$) a jeho výšky (což je hledaná vzdálenost h). Protože můžeme tento objem spočíst také pomocí smíšeného součinu jako $|\overrightarrow{AB} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})|$, dostaneme:

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})|}{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|}\,.$$

Pokud je rovina ϱ zadána pomocí skalární rovnice $ax + by + cz + d = 0$ spočteme vzdálenost h takto. Nechť $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ a $B = (x_0, y_0, z_0)$. Nechť $A = (a_1, a_2, a_3) \in \varrho$. Pak $|\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n}| = |\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}||\cos\varphi|$, kde φ je úhel mezi vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\boldsymbol{n}$. Navíc $|\overrightarrow{AB}||\cos\varphi| = h$, protože

$$|\cos\varphi| = \begin{cases} \cos\varphi & \text{když } \varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle\,, \\ \cos(\pi - \varphi) & \text{když } \varphi \in (\pi/2, \pi\rangle\,. \end{cases}$$

Takže

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|(x_0 - a_1)a + (y_0 - a_2)b + (z_0 - a_3)c|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,,$$

protože $d = -aa_1 - ba_2 - ca_3$ pro každý bod $A = (a_1, a_2, a_3) \in \varrho$.

1.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

Nechť p je přímka s bodovou rovnicí $X = A + t\boldsymbol{u}$, $t \in \mathbb{R}$ a ϱ rovina s normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$ a procházející bodem B. Pak vzájemnou polohu p a ϱ rozlišíme podle následujících případů:

1. Je-li $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{n}$ (tj. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$), pak nastávají tyto možnosti:

   a) Je-li $\overrightarrow{AB} \perp \boldsymbol{n}$ (tj. $\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n} = 0$), pak přímka p leží v rovině ϱ.

b) Je-li $\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$, pak je přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ.

2. Je-li $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$, pak přímka p protíná rovinu ϱ v jediném bodě.

Vzdálenost rovnoběžné přímky od roviny (v případě 1b) zjistíme jako vzdálenost bodu A od roviny ϱ.

Průsečík přímky s rovinou (v případě 2) najdeme tak, že dosadíme do skalární rovnice roviny ϱ za x, y, z hodnoty z parametrických rovnic přímky p. Řešení nám pak dá hodnotu parametru t, který po dosazení zpět do parametrických rovnic přímky p, již určí souřadnice průsečíku. Výše popsaný způsob hledání průsečíku je typický způsob, který se používá při řešení konkrétního příkladu. Nicméně pomocí našeho formalizmu můžeme také vyjádřit souřadnice průsečíku přímo i v obecném případě. Začneme se skalární rovnici roviny ϱ, tj. $\overrightarrow{BX} \cdot \boldsymbol{n} = 0$, kde za X dosadíme z bodové rovnice přímky p. Dostaneme tedy:

$$0 = \overrightarrow{BX} \cdot \boldsymbol{n} = (X - B) \cdot \boldsymbol{n} = (A + t\boldsymbol{u} - B) \cdot \boldsymbol{n} = (\overrightarrow{BA} + t\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} = \overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{n} + t(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\,.$$

Takže pro parametr t máme:

$$t = -\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}} = -\frac{(-\overrightarrow{AB}) \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}\,.$$

Dosazením zpět do bodové rovnice přímky p dostaneme pro průsečík P:

$$P = A + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \boldsymbol{n}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{u}\,.$$

Úhel α mezi přímkou a rovinou (v případě 2) spočítáme pomocí úhlu φ mezi přímkou p a libovolnou kolmicí na rovinu ϱ. Pak $\alpha = \pi/2 - \varphi$. Kolmice má směrový vektor $\boldsymbol{n}$, takže

$$\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) = \cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}\,.$$

1.5 Vzájemná poloha dvou rovin

Nechť ϱ, σ jsou roviny, ϱ prochází bodem A a $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor ϱ, a σ prochází bodem B a $\boldsymbol{m} = (e, f, g)$ je normálový vektor σ. Pak vzájemnou polohu ϱ, σ rozlišíme podle následujících případů:

1. Je-li $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$ LN posloupnost, pak jsou ϱ, σ různoběžné.

2. Je-li $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$ LZ posloupnost, pak nastávají tyto možnosti:

   a) Pokud $B \in \varrho$, pak ϱ, σ splývají.

   b) Pokud $B \notin \varrho$, pak jsou ϱ, σ rovnoběžné.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin (v případě 2b) spočítáme jako vzdálenost bodu B od roviny ϱ.

Průsečniči dvou rovin (v případě 1) spočítáme jako společné řešení skalárních rovnic rovin ϱ a σ. Nechť $ax + by + cz + d = 0$ je skalární rovnice roviny ϱ a $ex + fy + gz + h = 0$ je skalární rovnice roviny σ. Pak rovnici průsečnice dostaneme jako řešení následující soustavy lineárních rovnic pro neznámé x, y, z:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= -d\,, \\ ex + fy + gz &= -h\,. \end{aligned}$$

Úhel φ mezi dvěmi různoběžnými rovinami spočítáme pomocí úhlu mezi libovolnými kolmicemi rovin ϱ a σ. Protože směrové vektory těchto rovin jsou normálové vektory $\boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{m}$, dostaneme:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\,.$$