1 Elementární funkce

Mezi elementární komplexní funkce se obvykle počítají tyto funkce:

1.1 Lineární funkce

Lineární funkce je funkce tvaru

$$f(z) = az + b\,,$$

kde a a b jsou konečná komplexní čísla. Její derivace je v každém bodě z rovna $f'(z) = a$.

Pokud $a = 0$ pak se funkce f redukuje na konstantní funkci $f(z) = b$. Jestliže $a \neq 0$, pak je f prostá a inverzní zobrazení je také lineární funkce:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}\,.$$

1.2 Mocnina a odmocnina

Pro každé přirozené číslo n definujeme *n-tou mocninu* jako

$$f(z) = z^n\,.$$

Derivace existuje v každém bodě z a platí

$$f'(z) = nz^{n-1}\,.$$

Příklad 1.1 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $(z^n)' = nz^{n-1}$. Protože funkce z^n se špatně rozkládá na reálnou a imaginární část, vypočítáme derivaci $(z^n)'$ přímo z definice. Pro libovolný bod $z_0 \in \mathbb{C}$ z definice derivace máme:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} (z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1}) \\
&= nz^{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Funkce z^n pro $n > 1$ není prostá. Zřejmě $z^n = 0$ právě když $z = 0$. Pro $z \neq 0$ můžeme funkci z^n vyjádřit v exponenciálním tvaru:

$$z^n = \left(|z|e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n e^{jn\varphi}\,,$$

kde $\varphi = \arg z$. Nechť $z_1 = |z_1|e^{j\varphi_1}$ a $z_2 = |z_2|e^{j\varphi_2}$ jsou dvě různá komplexní čísla, pak $z_1^n = |z_1|^n e^{jn\varphi_1}$ a $z_2^n = |z_2|^n e^{jn\varphi_2}$. Aby tedy platilo $z_1^n = z_2^n$, musí platit

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{a} \quad n\varphi_1 = n\varphi_2 + 2k\pi \text{ pro } k \in \mathbb{Z}\,.$$

To znamená, že dva různé body z_1 a z_2 se n-tou mocninou zobrazí do stejného bodu, pokud se rovnají jejich moduly (leží na stejné kružnici se středem v počátku) a pro rozdíl jejich argumentů platí:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k\frac{2\pi}{n}\,,$$

kde $k \in \mathbb{Z}$. To znamená, že na kružnici o poloměru $|z_1|$ leží n bodů, které se zobrazí n-tou mocninou do stejného bodu.

Z výše uvedeného plyne, že inverzní funkce *n-tá odmocnina* nemůže být jednoznačná, ale bude jednomu bodu přiřazovat množinu o n prvcích. Hodnota funkce $\sqrt[n]{z}$ tedy bude množina všech čísel w, které splňují rovnici

$$w^n = z\,. \tag{1}$$

Příklad 1.2 Dokažte, že pro $z = 0$ je $\sqrt[n]{z} = \{0\}$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{j\varphi}$, $\varphi = \arg z$, platí

$$\sqrt[n]{z} = \{w_k \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}\,,$$

kde

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}\,e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}}\,.$$

Uvědomme si, že $\sqrt[n]{|z|}$ představuje odmocninu z reálného oboru.

První část pro $z = 0$ je jednoduchá. Pokud rovnici 1 napíšeme jen pro moduly, dostaneme $|z| = |w^n| = |w|^n$. Máme tedy, že $|z| = 0$ právě tehdy, pokud $|w| = 0$. A proto $z = 0$ právě tehdy, když $w = 0$.

Pro druhou část můžeme čísla z a w převést do exponenciálního tvaru, protože $z, w \neq 0$. Tedy

$$z = |z|e^{j\varphi}\,, \quad w = |w|e^{j\omega}\,.$$

Po dosazení do rovnice 1 dostaneme

$$|w|^n e^{jn\omega} = |z|e^{j\varphi}\,.$$

Odtud plyne

$$|w|^n = |z|\,, \quad e^{jn\omega} = e^{j\varphi}\,,$$

tzn.

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}\,, \quad n\omega = \varphi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Máme tedy pro jedno $k \in \mathbb{Z}$:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\,e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}}\,.$$

Dále je zřejmé, že pro $k = 0, \ldots, n-1$ budou hodnoty w_k různé a pro $k \geq n$ nebo $k < 0$ se již budou jen opakovat. Nakreslete si množinu hodnot nějaké n-té odmocniny pro jeden pevný bod z!

1.3 Lineární lomená funkce

Nechť a, b, c, d jsou konečná komplexní čísla taková, že $ad - bc \neq 0$. Funkci tvaru

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

nazveme *lineární lomenou* funkcí. Funkce má derivaci pro všechna $z \in \mathbb{C}$ kromě bodu $z = -\frac{d}{c}$ a platí z derivace podílu dvou funkcí

$$f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

Bod $-\frac{d}{c}$ mapuje funkce f na ∞ a naopak bod ∞ mapuje na $\frac{a}{c}$, takže f je bijekcí z $\mathbb{C}^*$ na $\mathbb{C}^*$. Inverzní funkci lze vyjádřit jako

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, , \quad f(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

1.4 Exponenciální funkce a logaritmus

Pro komplexní číslo $z = x + jy \in \mathbb{C}$ definujeme *exponenciální funkci* předpisem:

$$e^z = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j \sin y).$$

Derivace existuje v každém bodě $z \in \mathbb{C}$ a platí $(e^z)' = e^z$.

Příklad 1.3 Dokažte, že $(e^z)' = e^z$. Rozdělme e^z na reálnou a imaginární část:

$$e^z = e^x \cos y + je^x \sin y.$$

Máme tedy $u(x, y) = e^x \cos y$ a $v(x, y) = e^x \sin y$. Spočteme parciální derivace u a v.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= e^x \cos y & \frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin y \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin y & \frac{\partial v}{\partial y} &= e^x \cos y \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny parciální derivace jsou spojité a C-R podmínky jsou splněny ve všech bode (x, y) a tudíž derivace existuje pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a platí:

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + je^x \sin y = e^x(\cos y + j \sin y) = e^z.$$

Funkce e^z je periodická s periodou $j2\pi$, protože

$$e^{z+j2\pi} = e^{x+j(y+2\pi)} = e^x(\cos(y + 2\pi) + j \sin(y + 2\pi)) = e^x(\cos y + j \sin y) = e^z.$$

Funkce e^z tedy nemůže být prostá a proto ani logaritmus nemůže být jednoznačná funkce podobně jako v případě odmocniny definujeme *logaritmus* v bodě z jako množinu bodů w splňující rovnici $e^w = z$. Tedy

$$\mathrm{Log}(z) = \{w \mid e^w = z\}.$$

Příklad 1.4 Nalezněte všechna řešení rovnice $e^z = a$ pro $a \neq 0$. Označme $a = |a|e^{j\varphi}$, $\varphi = \arg a$. Dosazením do rovnice dostaneme

$$e^z = e^x e^{jy} = |a|e^{j\varphi} .$$

Odtud plyne

$$e^x = |a| , \quad e^{jy} = e^{j\varphi} .$$

Máme tedy

$$x = \ln|a| , \quad y = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi , \ k \in \mathbb{Z} .$$

To znamená, že

$$z = \ln|a| + j(\arg a + 2k\pi) , \ k \in \mathbb{Z} .$$

Vypočetli jsme tedy hodnotu logaritmu v bodě a.

$$\mathrm{Log}(a) = \{z \mid e^z = a\} = \{\ln|a| + j(\arg a + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}\} = \ln|a| + j\mathrm{Arg}\ a .$$

Připomeňme ještě, že hodnotu pro $k = 0$ nazveme *hlavní hodnotou* logaritmu a označíme $\log a$. Funkci, která každému bodu $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ přiřadí hodnotu $\log z$ nazýváme *hlavní větev* logaritmu:

$$\log z = \ln|z| + j \arg\ z .$$

Nakreslete si kam se zobrazí Gaussova rovina komplexních čísel bez bodu 0 funkcí log!

Příklad 1.5 Nalezněte derivaci funkce $\log z$.

Protože funkce $\log z$ není definována pro $z = 0$, neexistuje tam tedy ani derivace. Rovněž pro na množině $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\ z < 0\}$ neexistuje derivace, protože funkce $\arg z$ (a tím pádem i funkce $\log z$) je nespojitá v každém bodě $z \in M$.

Hledejme tedy derivaci $\log z$ na zbytku Gaussovy roviny. Pro reálnou část máme:

$$u(x, y) = \ln|z| = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) .$$

Určeme parciální derivace u podle x a y.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} , \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2} . \end{aligned}$$

Vidíme, že obě parciální derivace jsou spojité všude kromě bodu $(0, 0)$. Bod $(0, 0)$ jsme již ovšem výše vyřadili, protože v něm nemá funkce $\log z$ derivaci. Z toho plyne, že funkce u má pro námi zkoumané body totální diferenciál.

Výpočet imaginární části $\log z$ rozdělíme na tři části: 1. Re $z > 0$, 2. Im $z > 0$ a 3. Im $z < 0$.

1. Pokud Re $z > 0$, můžeme imaginární část funkce $\log z$ vyjádřit následovně:

$$v(x, y) = \arctan \frac{y}{x} \,.$$

Určeme parciální derivace v podle x a y.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \,, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \,.
\end{aligned}$$

Podobně jako v případě u vidíme, že v má v požadované oblasti totální diferenciál. Navíc také C-R podmínky jsou splněny, takže derivace v případě Re $z > 0$ existuje a je rovna:

$$(\log z)' = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z} \,.$$

2. Pokud Im $z > 0$ můžeme imaginární část funkce $\log z$ vyjádřit následovně:

$$v(x, y) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} \,.$$

Určeme parciální derivace v podle x a y.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \,, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{-x}{y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \,.
\end{aligned}$$

Vidíme, že i v tomto případě vyšly parciální derivace v stejně. Tudíž i pro případ Im $z > 0$ platí pro derivaci stejný vztah jako v bodě 1.

3. Pokud Im $z < 0$, pak $v(x, y) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y}$ a zbytek výpočtu je stejný jako v bodě 2.

Dostali jsme tedy, že pro body

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, w \leq 0,\ \mathrm{Im}\, w = 0\} \,,$$

(t.j. body, které neleží na nekladné reálné ose) platí:

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \,.$$

Příklad 1.6 Nalezněte derivaci hlavní větve druhé odmocniny:

$$f(z) = \sqrt{z} \,.$$

Vzhledem k tomu, že $f(z)$ je nespojitá na nekladné reálné poloose (t.j. neexistuje tam derivace), budeme předpokládat, že $z \notin \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, w \leq 0, \mathrm{Im}\, w = 0\}$.

Vyjádřeme f pomocí exponenciální funkce a logaritmu. Protože $z \neq 0$ můžeme napsat z v exponenciálním tvaru $z = |z|e^{j\varphi}$. Potom

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{j\frac{\varphi}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln|z|}e^{j\frac{\varphi}{2}} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z|+j\varphi)} = e^{\frac{1}{2}\log z}\,.$$

Nyní můžeme pro výpočet derivace využít derivace exponenciální funkce a logaritmu a větu o derivaci složené funkce.

$$(\sqrt{z})' = (e^{\frac{1}{2}\log z})' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\log z}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\log z}e^{-\log z} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\log z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\,.$$

1.5 Trigonometrické a hyperbolické funkce

Podobně jako v reálném oboru definujeme i v komplexním oboru trigonometrické a hyperbolické funkce pomocí exponenciální funkce.

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \qquad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Protože se na cvičení objevila otázka, proč se zavádí hyperbolické funkce, tak se na chvíli vraťme do reálného oboru a ukažme souvislosti mezi funkcemi sin, cos, sinh a cosh. Jak asi každý ví, že můžeme pomocí funkcí sin a cos parametricky popsat kružnici o poloměru r se středem v počátku:

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \end{aligned}$$

Podobným způsobem popisují funkce sinh a cosh parametricky pravou větev hyperboly, jejíž asymptoty jsou osy 1. a 4. kvadrantu, t.j.

$$\begin{aligned} x &= a\cosh t \\ y &= a\sinh t \end{aligned}$$

Případné zájemce o další informace odkazuji na stránku `http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicFunctions.html`.

Příklad 1.7 Nalezněte všechna řešení rovnice:

$$\sin z = \frac{4}{3}j\,.$$

Dosadíme podle definice $\sin z$ a dostáváme:

$$\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = \frac{4}{3}j\,.$$

Po vynásobení $2j$ máme:

$$e^{jz} - e^{-jz} = -\frac{8}{3}\,.$$

Po vynásobení $3e^{jz}$ dostaneme:

$$3e^{j2z} + 8e^{jz} - 3 = 0\,.$$

Zaveďme novou proměnnou $p = e^{jz}$ a dosaďme:

$$3p^2 + 8p - 3 = 0\,.$$

To je kvadratická rovnice, jejíž řešení je $p_1 = \frac{1}{3}$ a $p_2 = -3$. Vrátíme-li se zpět od p k e^{jz} dostaneme dvě rovnice:

$$e^{jz} = -\frac{1}{3}\,, \qquad e^{jz} = -3\,.$$

Z první rovnice máme:

$$jz = \mathrm{Log}\left(\frac{1}{3}\right) = \{\ln\left|\frac{1}{3}\right| + j2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-\ln 3 + j2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Po vydělení j, což vlastně znamená násobení $-j$ dostaneme:

$$z = \{2k\pi + j\ln 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Z druhé rovnice dostáváme:

$$jz = \mathrm{Log}(-3) = \{\ln|3| + j(\pi + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\ln 3 + j(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Po vydělení j:

$$z = \{(2k+1)\pi - j\ln 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Po sjednocení množin řešení z obou rovnic dostaneme:

$$z = \{n\pi + j(-1)^n \ln 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Všimněme si, že výsledek je v podstatě hodnota mnohoznačné funkce Arcsin v bodě $\frac{4}{3}j$. Množinu řešení si zobrazte v Gaussově rovině!