1 Použití mocniných řad

Nejprve si ukážeme dvě jednoduchá použití Taylorových řad.

Příklad 1 *Spočtěte následující limitu:*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Najdeme $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ pomocí mocninné řady pro funkci $\sin(x)$ se středem $x_0 = 0$. Víme, že

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením dostáváme:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots\right) = \langle\!\langle 1{-}0{+}0{-}0{+}\dots \rangle\!\rangle = 1\,.$$

Příklad 2 *Spočtěte přibližně*

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\,.$$

Víme, že $f(x) = e^{-x^2}$ nemá primitivní funkci F vyjádřitelnou pomocí elementárních funkcí a algebraických operací. Nicméně můžeme ji vyjádřit jako mocninou řadu. Primitivní funkci $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ najdeme pomocí mocninné řady funkce e^{-t^2} se středem v $x_0 = 0$, kterou potom budeme integrovat člen po členu. Mocninou řadu pro e^{-t^2} lze vyjádřit pomocí mocniné řady pro $e^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$, $t \in \mathbb{R}$. Dostaváme tedy:

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Dosazením získáme:

$$F(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^k\frac{t^{2k}}{k!}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\,.$$

Použijeme tohoto výsledku k odhadu určitého integrálu $\int_0^1 e^{-x^2}dx = F(1) - F(0)$. Protože $F(0) = 0$ dostaneme

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = F(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \dots \sim 0.747\,.$$

2 Fourierovy řady

Podobně jako jsme pomocí Taylorových řad reprezentovali funkce, které měli v nějakém okolí bodu x_0 omezené derivace všech řádů, budeme pomocí Fourierových řad reprezentovat periodické funkce (samozřejmě musí to být „rozumné“ funkce viz Jordanovo kritérium). Máme-li zadanou periodickou funkci $f(t)$ s periodou T, pak k ní příslušná Fourierova řada je následující funkční řada:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)]\,,$$

kde $\omega = 2\pi/T$ a

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt\,, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt\,,\ k \geq 1\,,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt\,,\ \ k \geq 1\,.$$

Typická úloha, která se v souvislosti s Fourierovými řadami vyskytuje, je nalézt pro nějakou funkci f na intervalu $\langle 0, T)$ její Fourierovu řadu a určit, jaký je její skutečný součet (tj. jak moc dobře řada původní funkci reprezentuje). Protože Fourierova řada je definována pro periodické funkce můžeme tuto úlohu vyřešit třemi různými způsoby:

1. prodloužit funkci f na T-periodickou. Potom dostaneme Fourierovu řadu, které může obsahovat jak členy se sinem tak i kosinem.
2. prodloužit funkci f na lichou $2T$-periodickou. Potom dostaneme tzv. sinovou Fourierovu řadu, která obsahuje jen členy se sinem.
3. prodloužit funkci f na sudou $2T$-periodickou. Potom dostaneme tzv. kosinovou Fourierovu řadu, která obsahuje jen členy s kosinem.

Pokud bychom v bodech 2 a 3 přímo počítali koeficienty a_k a b_k pomocí definice Fourierovy řady, museli bychom integrovat přes interval dlouhý $2T$. Nicméně díky jisté symetrii, kterou liché a sudé funkce splňují, lze ukázat, že koeficienty lze v těchto případech spočítat jednodušeji. Konkrétně pro sinovou řadu platí $a_k = 0$ a

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt\,,$$

kde tentokrát $\omega = \frac{\pi}{T}$. Pro kosinovou máme naopak $b_k = 0$ a

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt\,,\ \text{kde } \omega = \frac{\pi}{T}\,.$$

Ukážeme si nyní na konkrétních příkladech, jak se tato úloha řeší. V každém příkladu ukážeme všechny tři možné řešení z výše uvedených bodů.

Příklad 3 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, 2); \\ 2, & t \in \langle 2, 4). \end{cases}$$

Fourierova řada:

Perioda funkce $f(t)$ je tedy $T = 4$. To znamená, že $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Spočteme koeficienty a_k. Pro $k = 0$ máme:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\,dt = 2\,.$$

Pro $k \geq 1$ dostaneme:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\big(k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \Big[\frac{1}{k\frac{\pi}{2}}\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4 = 0\,.$$

Poslední rovnost plyne z faktu, že $\sin(2k\pi) = \sin(k\pi) = 0$ pro všechny k.

Dále spočítáme koeficienty b_k, $k \geq 1$:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\big(k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \Big[-\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\Big]_2^4 = -\frac{2}{k\pi}(\cos(2k\pi) - \cos(k\pi))\,.$$

Protože $\cos(2k\pi) = 1$ a $\cos(k\pi) = (-1)^k$, dostaneme nakonec

$$b_k = -\frac{2}{k\pi}[1-(-1)^k] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ -\frac{4}{k\pi}, & k \text{ liché.} \end{cases}$$

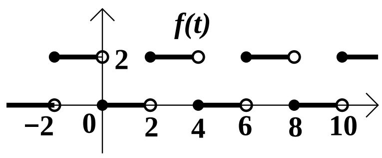
Fourierova řada pro danou funkci tedy je:

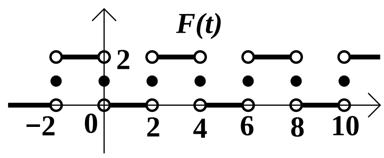
$$f \sim \frac{2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(0\cdot\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big) + \frac{2}{k\pi}[(-1)^k-1]\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\Big) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}[(-1)^k-1]\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)$$

Jelikož všechny sudé členy vyskytující se v poslední řadě jsou nulové, lze poslední výraz ještě upravit tak, že sčítací index k nahradíme výrazem $2k+1$ a za b_k dosadíme jeho hodnoty pro lichá k:

$$f \sim 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{(2k+1)\pi}\sin\big((2k+1)\frac{\pi}{2}t\big)$$

Dále máme určit součet nalezené Fourierovy řady. Nakreslíme si periodické prodloužení f (vlevo), a pak si vzpomeneme na Jordanovo kritérium. Tam, kde je f spojitá, je součet řady roven f. Tam, kde je bod nespojitosti, konverguje řada k průměru $\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]$ (součet vpravo).





Formulí lze součet vyjádřit takto:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in (4k, 4k+2); \\ 2, & t \in (4k+2, 4k+4); \;\; \text{pro } k \in \mathbb{Z}\,. \\ 1, & t = 2k \end{cases}$$

Všimněte si následující věci: „normální“ Fourierka je „skoro sinová“, proč? Protože podle obrázku vidíme, že periodické prodlužení f je vlastně ve tvaru 1+„lichá funkce“, proto také odpovídající řada je ve tvaru 1+„sinová“.

sinová Fourierova:

V tomto případě máme opět $T = 4$. Nicméně $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Protože budeme počítat sinovou řady víme, že koeficienty u kosinů $a_k = 0$. Spočtěme nyní koeficienty b_k:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\sin\big(k\omega t\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\sin\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\,dt = \Big[-\frac{4}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\Big]_2^4 = -\frac{4}{k\pi}\big[\cos(k\pi) - \cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big]\,.$$

Jelikož $\cos(k\pi) = (-1)^k$ a

$$\cos(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 4n\,, \\ 0 & \text{pro } k = 4n \pm 1\,, \;\; n \in \mathbb{Z}\,, \\ -1 & \text{pro } k = 4n+2\,, \end{cases}$$

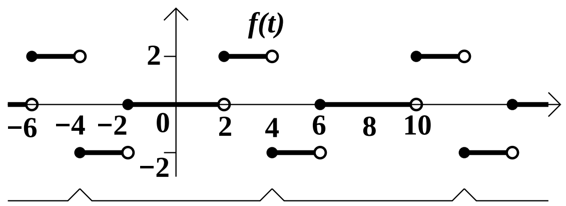
můžeme přepsat poslední výraz pro b_k takto:

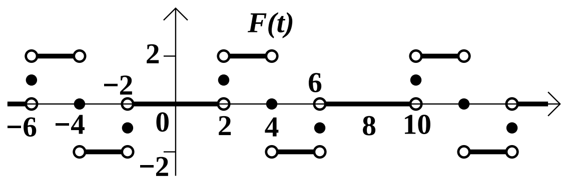
$$b_k = -\frac{4}{k\pi}\big[(-1)^k - \cos\big(k\frac{\pi}{2}\big)\big] = \begin{cases} 0, & k = 4n\,, \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n \pm 1\,, \;\; n \in \mathbb{Z}\,, \\ -\frac{8}{k\pi}, & k = 4n+2\,. \end{cases}$$

Poslední výraz není příliš hezký, takže ho výsledného zápisu řady raději nepoužijeme. Dostáváme tedy:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}\big[\cos\big(k\frac{\pi}{2}\big) - (-1)^k\big]\sin\big(k\frac{\pi}{4}t\big)\,.$$

Dále určíme součet sinové řady. Nejprve nakreslíme **liché** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4)$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.





kosinová Fourierova:

Nakonec najdeme kosinovou řadu. Máme tedy $T = 4$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$. Koeficienty u sinů $b_k = 0$. Pro koeficienty u kosinů máme:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\,dt = 2\,,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\cos\bigl(k\omega t\bigr)\,dt = \frac{1}{2}\int_2^4 2\cos\bigl(k\frac{\pi}{4}t\bigr)\,dt = \Bigl[\frac{4}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{4}t\bigr)\Bigr]_2^4 = \frac{4}{k\pi}\bigl[\sin(k\pi) - \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\bigr]\,.$$

Jelikož $\sin(k\pi) = 0$ dostáváme:

$$a_k = -\frac{4}{k\pi}\sin(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0, & k = 4n\,,\ k = 4n+2\,, \\ -\frac{4}{k\pi}, & k = 4n+1\,, \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 4n+3\,. \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

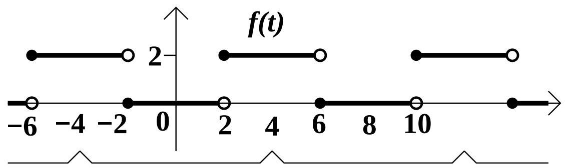
Proto

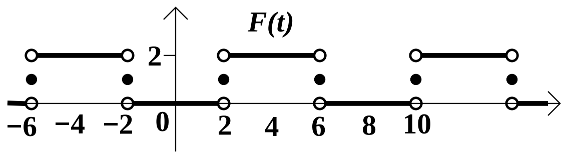
$$f \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\cos\bigl(k\frac{\pi}{4}t\bigr)\,.$$

Všiměte si, že koeficienty a_k se rovnají 0 pro sudá k a $\frac{4}{k\pi}$ nebo $-\frac{4}{k\pi}$ pro lichá. Pokud tedy nahradíme sčítací index ve výsledné řadě výrazem $2k+1$, lze výsledek napsat takto:

$$f \sim 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{(2k+1)\pi}\cos\bigl((2k+1)\frac{\pi}{4}t\bigr)\,.$$

Nakonec určíme součet kosinové řady. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -4, 4)$ (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.





Příklad 4 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = 1 - t\,,\ t \in \langle 0, 2)\,.$$

Fourierova řada:

Pro funkci f máme $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Spočítáme koeficienty a_k a b_k.

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\,dt = 0\,.$$

Následující integrály budeme počítat pomocí metody per partes.

$$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\cos(k\pi t)\,dt = \left|\begin{array}{cc} u = 1-t & v' = \cos(k\pi t) \\ u' = -1 & v = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\end{array}\right| = \Bigl[(1-t)\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\Bigr]_0^2 + \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \sin(k\pi t)\,dt\,.$$

Protože $\sin(2k\pi) = \sin(0) = 0$ první část posledního výrazu je nulová. Dostáváme tedy

$$a_k = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_0^2 = \frac{1}{k^2\pi^2}(\cos(2k\pi) - \cos(0)) = \frac{1}{k^2\pi^2}(1-1) = 0\,.$$

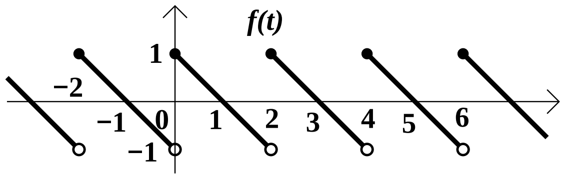
Pro koeficienty b_k dostaneme:

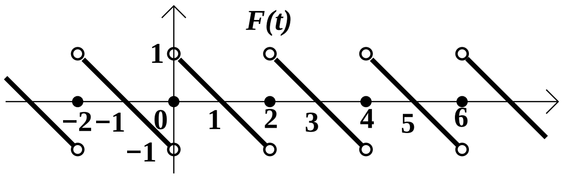
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\sin(k\pi t)\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = 1-t & v' = \sin(k\pi t) \\ u' = -1 & v = -\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t) \end{array}\right| = \\
&= \left[-(1-t)\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_0^2 - \frac{1}{k\pi}\int_0^2 \cos(k\pi t)\,dt = \\
&= \left[-(1-2)\frac{1}{k\pi}\cos(2k\pi) + (1-0)\frac{1}{k\pi}\cos(0)\right] - \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^2 = \\
&= \frac{2}{k\pi} - \frac{1}{k^2\pi^2}(\sin(2k\pi) - \sin(0)) = \frac{2}{k\pi}\,.
\end{aligned}$$

Výsledná řada tedy je

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\sin(k\pi t)\,.$$

Nakonec opět určíme součet výsledné řady. Nejprve nakreslíme periodické prodloužení f (vlevo), pak podle Jordanova kritéria součet řady (vpravo):





sinová Fourierova řada:

Protože normální periodické prodloužení f je liché, měla už normální Fourierovka vyjít jako sinová, což také vyšla.

kosinová Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Protože počítáme kosinovou řadu koeficienty b_k jsou nulové. Pro koeficienty a_k dostaneme

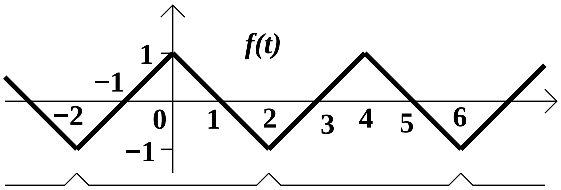
$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\,dt = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 (1-t)\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \left|\begin{array}{ll} u = 1-t & v' = \cos(k\frac{\pi}{2}t) \\ u' = -1 & v = \frac{2}{k\pi}\sin(k\frac{\pi}{2}t) \end{array}\right| = \\
&= \left[(1-t)\frac{2}{k\pi}\sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\right]_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \sin\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\,dt = \\
&= \left[(1-2)\frac{2}{k\pi}\sin(k\pi) - (1-0)\frac{2}{k\pi}\sin(0)\right] - \frac{2}{k\pi}\left[\frac{2}{k\pi}\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big)\right]_0^2 = \\
&= [0-0] - \frac{4}{k^2\pi^2}\big[\cos(k\pi) - 1\big] = \frac{4}{k^2\pi^2}\big[1-(-1)^k\big] = \begin{cases} 0, & k \text{ sudé;} \\ \frac{8}{k^2\pi^2}, & k \text{ liché.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Můžeme tedy napsat výslednou řadu. Protože jsou opět sudé členy nulové, zaměníme také sčítací index k za $k+1$.

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}[1-(-1)^k]\cos\big(k\frac{\pi}{2}t\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\big((2k+1)\frac{\pi}{2}t\big)\,.$$

Nakonec opět určíme součet. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f se základní periodou $\langle -2, 2)$. Protože toto prodloužení je spojité, je to i součet řady.



Příklad 5 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t) = t + \pi\,,\ \ t \in \langle -\pi, \pi)\,.$$

Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Funkce není zadána na intervalu typu $\langle 0, T)$, ale to pro Fourierovou řadu nevadí, stejně ji rozšiřujeme periodicky a tudíž můžeme vzít libovolný interval zahrnující jednu periodu, například $\langle 0, 2\pi)$. Pak by se ale blbě integrovalo, protože v bodě π by byla nespojitost a všechny integrály by se nám rozdělily na dva. Proto budeme raději integrovat přes původně zadaný interval.

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\,dt = 2\pi\,.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\cos(kt)\,dt = \left| \begin{array}{cc} u = t+\pi & v' = \cos(kt) \\ u' = 1 & v = \frac{1}{k}\sin(kt) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[(t+\pi)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\,dt = 0 + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

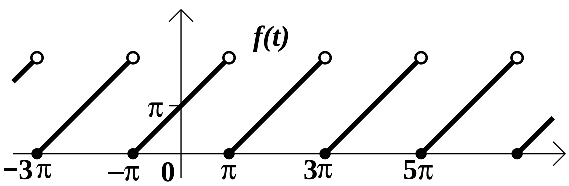
Poslední rovnost plyne z faktu, že kosinus je sudá funkce a tudíž $\cos(k\pi) = \cos(-k\pi)$.

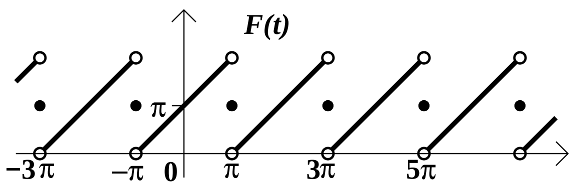
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} (t+\pi)\sin(kt)\,dt = \left| \begin{array}{cc} u = t+\pi & v' = \sin(kt) \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{k}\cos(kt) \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-(t+\pi)\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\,dt = \\ &= -\frac{2}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\,. \end{aligned}$$

Proto

$$f \sim \pi + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin(kt)\,.$$

Určeme ještě součet výsledné řady. Nejprve nakreslíme periodické prodloužení f (vlevo), pak podle Jordanova kritéria součet řady (vpravo):





Poznámka: Periodické prodloužení dané funkce je ve tvaru $\pi+$„lichá“, tedy i řada je $\pi+$„sinová“.

sinová a kosinová Fourierova řada:

Funkce byla zadána na intervalu, který „překračuje“ počátek, tedy zahrnuje kladná i záporná čísla. Nemáme proto možnost si funkci upravit tak, aby byla buď sudá nebo lichá. Můžeme jen doufat, že nějakou symetrii už měla ze zadání. Vidíme ale, že není ani lichá ani sudá, proto nelze udělat ani sinovou, ani kosinovou řadu.

Příklad 6 *Pro následující funkci (tj. příslušné periodické prodloužení) najděte její Fourierovou řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Pro každou řadu určete její součet.*

$$f(t)=\begin{cases}1, & t\in\langle 0,1)\,,\\ 2-t, & t\in\langle 1,2)\,.\end{cases}$$

Fourierova řada:

V tomto případě máme $T=2$, $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$. Spočteme koeficienty a_k a b_k.

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^1 1\,dt+\int_1^2(2-t)dt=\frac{3}{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(k\pi t)\,dt=\int_0^1\cos(k\pi t)\,dt+\int_1^2(2-t)\cos(k\pi t)\,dt=\left|\begin{array}{ll} u=2-t & v'=\cos(k\pi t)\\ u'=-1 & v=\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\end{array}\right|=\\
&= \left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^1+\left[(2-t)\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_1^2+\frac{1}{k\pi}\int_1^2\sin(k\pi t)\,dt=0+0+\frac{1}{k\pi}\left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_1^2=\\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}[-1+\cos(k\pi)]=\frac{1}{k^2\pi^2}[-1+(-1)^k]=\frac{1}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]=\begin{cases}0, & k\text{ sudé;}\\ -\frac{2}{k^2\pi^2}, & k\text{ liché.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme opět využili toho, že $\sin(0)=\sin(k\pi)=\sin(2k\pi)=0$, $\cos(2k\pi)=1$ a $\cos(k\pi)=(-1)^k$.

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(k\pi t)\,dt=\int_0^1\sin(k\pi t)\,dt+\int_1^2(2-t)\sin(k\pi t)\,dt=\left|\begin{array}{ll} u=2-t & v'=\sin(k\pi t)\\ u'=-1 & v=-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\end{array}\right|=\\
&= \left[-\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_0^1+\left[-(2-t)\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)\right]_1^2-\frac{1}{k\pi}\int_1^2\cos(k\pi t)\,dt=\\
&= -\frac{1}{k\pi}[\cos(k\pi)-1]+\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi)-\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_1^2=\frac{1}{k\pi}-0=\frac{1}{k\pi}\,.
\end{aligned}$$

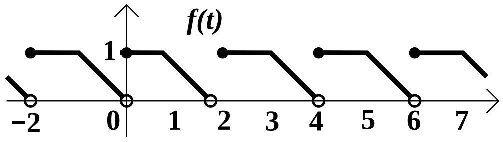
Pro výslednou řadu tedy dostáváme:

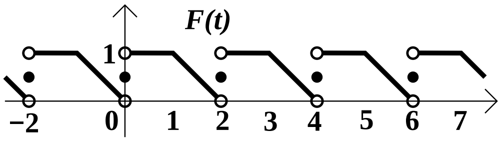
$$f\sim\frac{3}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k^2\pi^2}[(-1)^k-1]\cos(k\pi t)+\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\Big)\,.$$

Protože první člen v závorce je pro všechna sudá k nulový, můžeme řadu rozdělit na dvě a v první nahradit sčítací index výrazem $2k+1$.

$$f\sim\frac{3}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-2}{(2k+1)^2\pi^2}\cos((2k+1)\pi t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\,.$$

Nakonec opět určíme součet výsledné řady. Nejprve nakreslíme periodické prodloužení f (vlevo), pak uděláme součet podle Jordanova kritéria (vpravo).





sinová Fourierova řada:

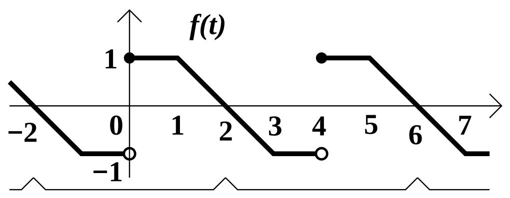
V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Protože počítáme sinovou řadu bude $a_k = 0$. Pro koeficienty b_k dostáváme:

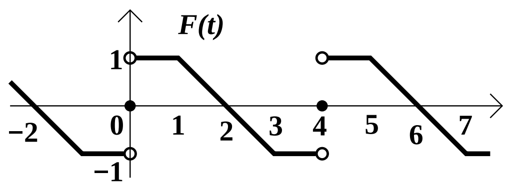
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \int_0^1 \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt + \int_1^2 (2-t)\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 2-t & v' = \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \\ u' = -1 & v = -\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \end{array} \right| = \\
&= \Bigl[-\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_0^1 + \Bigl[-(2-t)\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 - \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= -\frac{2}{k\pi}\Bigl[\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - 1\Bigr] + \frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - \frac{2}{k\pi}\Bigl[\frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 = \frac{2}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Výsledná řada tedy je

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Bigl[\frac{2}{k\pi} + \frac{4}{k^2\pi^2}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr]\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,.$$

Nakonec opět určíme součet. Nejprve nakreslíme **liché** periodické prodloužení f (vlevo), pak nakreslíme součet dle Jordanova kritéria.





kosinová Fourierova řada:

V tomto případě máme $T = 2$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$. Protože hledáme kosinovou řadu budou koeficienty b_k nulové. Spočtěme koeficienty a_k:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 (2-t)dt = \frac{3}{2}\,.$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \int_0^1 \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt + \int_1^2 (2-t)\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= \left| \begin{array}{ll} u = 2-t & v' = \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \\ u' = -1 & v = \frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr) \end{array} \right| = \\
&= \Bigl[\frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_0^1 + \Bigl[(2-t)\frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 + \frac{2}{k\pi}\int_1^2 \sin\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,dt = \\
&= \frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - \frac{2}{k\pi}\sin\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - \frac{2}{k\pi}\Bigl[\frac{2}{k\pi}\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\Bigr]_1^2 = \\
&= -\frac{4}{k^2\pi^2}\Bigl[\cos(k\pi) - \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr] = -\frac{4}{k^2\pi^2}\Bigl[(-1)^k - \cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr)\Bigr]\,.
\end{aligned}$$

Pro výslednou řadu tedy dostáváme:

$$f \sim \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2}\bigl[\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}\bigr) - (-1)^k\bigr]\cos\bigl(k\frac{\pi}{2}t\bigr)\,.$$

Nakonec určíme opět součet. Nejprve nakreslíme **sudé** periodické prodloužení f. Protože sudé periodické prodloužení funkce f je spojité, musí se součet výsledné řady dle Jordanova kritéria rovnat tomuto prodloužení.