1 Variace konstanty

Nejdřív spočítáme jeden příklad na variaci konstant pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu s kostantními koeficienty.

Příklad 1 *Najděte obecné řešení rovnice:*

$$y'' + y = 4\sin t\,.$$

Co se týče existence řešení, tak řešení bude existovat na celé množině reálných čísel, protože funkce $4\sin t$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Nejprve nalezneme fundamentální systém, t.j. bázi pro podprostor všech homogenních řešení dané rovnice. Chrakteristický polynom je $\lambda^2 + 1$. Jeho kořeny jsou $+j$ a $-j$. Z toho plyne, že fundamentální systém naší rovnice je množina $\{\sin t, \cos t\}$. Jakékoliv homogenní řešení má tedy tvar $y_h = a\sin t + b\cos t$ pro nějaká reálná čísla a, b.

V dalším kroku najdeme partikulární řešení pomocí variace konstanty. Řešení tedy odhadujeme ve tvaru $y_p = a(x)\sin t + b(x)\cos t$, kde $a(x)$ a $b(x)$ jsou nějaké neznámé funkce nezávislé proměnné x. Abychom mohli odhadnuté řešení do naší rovnice dosadit, musíme spočítat jeho první a druhou derivaci. Dostáváme tedy

$$y_p' = a(x)\cos t - b(x)\sin t + a'(x)\sin t + b'(x)\cos t\,.$$

Abychom zjednodušili výpočet budeme vyžadovat od funkcí $a(x), b(x)$ aby splňovaly tuto rovnici $a'(x)\sin t + b'(x)\cos t = 0$. Tím pádem máme $y_p' = a(x)\cos t - b(x)\sin t$. Spočteme druhou derivaci y_p:

$$y_p'' = a'(x)\cos t - b'(x)\sin t - a(x)\sin t - b(x)\cos t\,.$$

Po dosazení do rovnice víme z obecného postupu variace konstanty, že dostaneme následující rovnost:

$$a'(x)\cos t - b'(x)\sin t = 4\sin t\,,$$

t.j. první půlka výrazu druhé derivace y_p se rovná pravé straně zadané rovnice (z toho mimojiné plyne, že není potřeba druhou pulku y_p počítat). Dáme-li dohromady rovnice, které musí funkce $a(x), b(x)$ splňovat, dostaneme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a'(x)\sin t + b'(x)\cos t &= 0 \\ a'(x)\cos t - b'(x)\sin t &= 4\sin t \end{aligned}$$

Soustava má řešení, protože determinant její matice není nic jiného než Wronskián fundamentálního systému. Řešení najdeme buď dosazovací metodou nebo přes Cramerovo pravidlo. Ukáži druhou možnost. Determinant matice soustavy je:

$$D = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1\,.$$

Determinant pro neznámou funkci $a'(x)$ je:

$$D_{a'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ 4\sin t & -\sin t \end{vmatrix} = -4\sin t\cos t\,.$$

Determinant pro neznámou funkci $b'(x)$ je:

$$D_{b'} = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & 4\sin t \end{vmatrix} = 4\sin^2 t\,.$$

Pro neznámé tedy dostáváme:

$$a'(x) = \frac{D_{a'}}{D} = \frac{-4\sin t\cos t}{-1} = 4\sin t\cos t\,, \quad b'(x) = \frac{D_{b'}}{D} = \frac{4\sin^2 t}{-1} = -4\sin^2 t\,.$$

Integrací najdeme hledané funkce $a(x), b(x)$.

$$a(x) = 4\int \sin t\cos t\,dt = 4\int u\,du = 2\sin^2 t\,,$$

kde při výpočtu integrálu jsme použili substituci $u = \sin t$, $du = \cos t\,dt$. Pro $b(x)$ máme:

$$b(x) = -4\int \sin^2 t\,dt = -4\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) = \sin 2t - 2t\,.$$

Partikulární řešení dastaneme dosazením funkcí $a(x), b(x)$ do odhadu y_p:

$$y_p = 2\sin^2 t \sin t + (\sin 2t - 2t)\cos t = 2\sin^3 t + (\sin 2t - 2t)\cos t\,.$$

Nakonec obecné řešení získáme jako součet partikulárního a homogenního řešení:

$$y = y_p + y_h = 2\sin^3 t + (\sin 2t - 2t)\cos t + a\sin t + b\cos t\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

2 Odhad řešení pro speciální pravou stranu

Nejprve si trochu zopakujeme teorii. Věta o odhadu řešení pro speciální pravou stranu říká, že pokud máme lineární difirenciální rovnici n-tého řádu s konstatními koeficienty

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b(x)$$

a její pravá strana je ve tvaru kvazipolynomu, t.j. $b(x) = e^{\alpha x}[P(x)\sin(\beta x) + Q(x)\cos(\beta x)]$ (kde P, Q jsou polynomy), pak můžeme partikulární řešení odhadnout ve tvaru:

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}[\widetilde{P}(x)\sin(\beta x) + \widetilde{Q}(x)\cos(\beta x)]\,,$$

kde $\widetilde{P}, \widetilde{Q}$ jsou polynomy stupně maximálně $m = \max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(Q)\}$ a k je násobnost čísla pravé strany $\alpha + \beta j$ jako kořene charakteristického polynomu dané diferenciální rovnice. Pokud $\alpha + \beta j$ není kořenem, pak $k = 0$. Pro odhadnutí řešení tedy nejprve musíme nalézt kořeny charakteristického polynomu. Zjistit, jestli číslo pravé strany $\alpha + \beta j$ je kořenem, určit jeho násobnost (tzn. najít číslo k) a pak najít maximum ze stupňů polynomů $P(x)$ a $Q(x)$ (t.j. číslo m).

V následující tabulce jsou pro čtyři různé levé strany lineárních direfenciálních rovnic a několik pravých stran ukázány odhady řešení podle výše uvedené věty. Pod každou levou stranou rovnice jsou zároveň uvedeny kořeny charakteristického polynomu, jejich násobnosti a odpovídající fundamentální systém. Pod každou pravou stranou je uvedeno číslo pravé strany.

$b(x)$	$y''' - 4y'$ $\lambda = 0, -2, 2$ $\{1, e^{-2x}, e^{2x}\}$	$y''' + 4y'$ $\lambda = 0, -2j, 2j$ $\{1, \sin 2x, \cos 2x\}$	$y'' - 2y' + 2y$ $\lambda = 1 + j, 1 - j$ $\{e^x \sin x, e^x \cos x\}$	$y'' - 4y' + 4y$ $\lambda = 2\ (2\times)$ $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$
$xe^{2x}\sin x$ $2 + 1j$	$e^{2x}[(A + Bx)\sin x$ $+(C + Dx)\cos x]$	$e^{2x}[(A + Bx)\sin x$ $+(C + Dx)\cos x]$	$e^{2x}[(A + Bx)\sin x$ $+(C + Dx)\cos x]$	$e^{2x}[(A + Bx)\sin x$ $+(C + Dx)\cos x]$
xe^{2x} $2 + 0j$	$x(A + Bx)e^{2x}$	$(A + Bx)e^{2x}$	$(A + Bx)e^{2x}$	$x^2(A + Bx)e^{2x}$
$13\sin 2x$ $0 + 2j$	$A\sin 2x + B\cos 2x$	$x[A\sin 2x + B\cos 2x]$	$A\sin 2x + B\cos 2x$	$A\sin 2x + B\cos 2x$
$e^x\cos x$ $1 + 1j$	$e^x[A\sin x + B\cos x]$	$e^x[A\sin x + B\cos x]$	$xe^x[A\sin x + B\cos x]$	$e^x[A\sin x + B\cos x]$
$5x^2 - 1$ $0 + 0j$	$x[A + Bx + Cx^2]$	$x[A + Bx + Cx^2]$	$A + Bx + Cx^2$	$A + Bx + Cx^2$
$2e^x + \sin 2x$ $1, 2j$	$Ae^x + B\sin 2x$ $+C\cos 2x$	$Ae^x + x[B\sin 2x$ $+C\cos 2x]$	$Ae^x + B\sin 2x$ $+C\cos 2x$	$Ae^x + B\sin 2x$ $+C\cos 2x$
$e^x - 3e^{2x}$ $1, 2$	$Ae^x + xBe^{2x}$	$Ae^x + Be^{2x}$	$Ae^x + Be^{2x}$	$Ae^x + x^2Be^{2x}$
$1 + xe^{-2x}$ $0, -2$	$xA + x(B + Cx)e^{-2x}$	$xA + (B + Cx)e^{-2x}$	$A + (B + Cx)e^{-2x}$	$A + (B + Cx)e^{-2x}$
$\sin 2x + \cos x$ $2j, j$	$A\sin 2x + B\cos 2x$ $+C\sin x + D\cos x$	$x[A\sin 2x + B\cos 2x]$ $+C\sin x + D\cos x$	$A\sin 2x + B\cos 2x$ $+C\sin x + D\cos x$	$A\sin 2x + B\cos 2x$ $+C\sin x + D\cos x$

Tabulka 1: tabulka s odhady partikulárních řešení pro různé levé a pravé strany.

Popíši podrobněji jak se získalo několik odhadů v tabulce 1. Pro první řádek a první sloupec vidíme (číslonáno od nuly), že pravou stranu lze vyjádřit v následujícícm tvaru:

$$xe^{2x}\sin x = e^{2x}[x\sin 1x + 0\cos 1x]\,.$$

Z toho plyne, že číslo pravé strany $\alpha+\beta j$ je $2+j$. Vzhledem k tomu, že $2+j$ není kořenem char. polynomu, bude číslo k rovno 0. Dále polynom $P(x) = x$ před $\sin 1x$ má stupeň 1 a polynom $Q(x) = 0$ před $\cos 1x$ má stupeň -1. To znamená, že číslo $m = \max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(Q)\} = 1$. Budeme tedy polynomy $\widetilde{P}(x)$ a $\widetilde{Q}(x)$ odhadovat jako polynomy stupně 1. Podle věty uvedené na začátku této kapitoly bude odhad tedy vypadat takto:

$$y(x) = x^0e^{2x}[(A+Bx)\sin x + (C+Dx)\cos x] = e^{2x}[(A+Bx)\sin x + (C+Dx)\cos x]\,,$$

kde neznámé koeficienty A, B, C, D lze dopočítat po dosazení do diferenciální rovnice.

Ukažme dále, jak lze obdržet např. poslední sloupec na druhém řádku. Pravou stranu můžeme vyjádřit jako $xe^{2x} = e^{2x}[0\sin 0x + x\cos 0x]$. To znamená, že číslo pravé strany $\alpha+\beta j = 2+0j = 2$. Jeho násobnost $k = 2$, protože 2 je dvojnásobný kořen char. polynomu levé strany v posledním sloupci. Dále vidíme, že maximum m ze stupňů polynomů $P(x) = 0$ a $Q(x) = x$ je opět 1. Odhad tedy bude vypadat takto:

$$y(x) = x^2e^{2x}[(C+Dx)\sin 0x + (A+Bx)\cos 0x] = x^2(A+Bx)e^{2x}\,.$$

Dále zkusme najít odhad pro třetí řádek, druhý sloupec. Pravá strana můžeme rozepsat ve tvaru $13\sin 2x = e^{0x}[13\sin 2x + 0\cos 2x]$. Číslo pravé strany je tedy $0+2j$. Jeho násobnost $k = 1$. Polynom $P(x) = 13$ a $Q(x) = 0$. To znamená, že maximum $m = 0$, protože stupeň polynomu $P(x)$ je 0. Odhad tedy bude vypadat takto:

$$y(x) = x^1e^{0x}[A\sin 2x + B\cos 2x] = x[A\sin 2x + B\cos 2x]\,.$$

Nakonec zkusme najít odhad pro pátý řádek a první sloupec. Pravou stranu lze napsat ve tvaru $5x^2 - 1 = e^{0x}[0\sin 0x + (5x^2-1)\cos 0x]$. Číslo pravé strany tedy je $0+0j$. Jeho násobnost $k = 1$. Dále maximum $m = 2$. Odhad tedy bude vypadat takto:

$$y(x) = x^1e^{0x}[(D+Ex+Fx^2)\sin 0x + (A+Bx+Cx^2)\cos 0x] = x(A+Bx+Cx^2)\,.$$

V druhé půlce tabulky 1 jsou příklady odhadů používající navíc principu superpozice. Připomeňme, co říká. Mějme lineární diferenciální rovnici, kde pravá strana lze vyjádřit jako součet dvou funkcí, t.j.

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b_1(x) + b_2(x)\,.$$

Princip superpozice říká, že pokud máme řešení $y_1(x)$ pro rovnici $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y = b_1(x)$ a řešení $y_2(x)$ pro rovnici $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y = b_2(x)$, pak $y_1(x)+y_2(x)$ je řešení původní rovnice $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y = b_1(x)+b_2(x)$. Toho můžeme využít např. v případech, kdy na pravé straně lin. dif. rovnice máme součet několika kvazipolynomů.

Ukážeme si toto použití na příkladech z tabulky 1. Začneme se šestým řádkem a druhým sloupce (opět číslováno od nuly). Pravá strana lze vyjádřit jako součet dvou kvazipolynomů jako:

$$2e^x + \sin 2x = e^x[0\sin 0x + 2\cos 0x] + e^{0x}[1\sin 2x + 0\cos 2x]\,.$$

Odhadneme řešení pro každý kvazipolynom zvlášť a jejich součet nám dá požadované řešení. Odhad pro první kvazipolynom je $x^0e^{1x}[B\sin 0x + A\cos 0x] = Ae^x$, protože číslo pravé strany pro první kvazipolynom je 1, jeho násobnost $k = 0$ a stupeň polynomu $Q(x) = 2$ je 0. Odhad pro druhý je

$$x^1e^{0x}[B\sin 2x + C\cos 2x] = x[B\sin 2x + C\cos 2x]\,,$$

protože číslo pravé strany pro druhý kvazipolynom je $2j$, jeho násobnost $k = 1$ a stupeň polynomu $P(x) = 1$ je 0. Součet obou odhadů nám teď dá výsledný odhad řešení

$$Ae^x + x[B\sin 2x + C\cos 2x]\,.$$

V jednotlivých odhadech jsme použili jiná jména pro neznámé parametry, protože odhady jsou na sobě nezávislé.

Ukažme ještě, jak lze obdržet odhad z předposledního řádku a prvního sloupce tabulky 1. Pravá strana lze vyjádřit jako:

$$1 + xe^{-2x} = e^{0x}[0\sin 0x + 1\cos 0x] + e^{-2x}[0\sin 0x + x\cos 0x]\,.$$

První odhad tedy bude $x^1 e^{0x}[D\sin 0x + A\cos 0x] = xA$. Druhý odhad bude

$$x^1 e^{-2x}[(E+Fx)\sin 0x + (B+Cx)\cos 0x] = x(B+Cx)e^{-2x}\,.$$

Výsledný odhad bude opět součtem jednotlivých odhadů, t.j.

$$xA + x(B+Cx)e^{-2x}\,.$$

Nakonec ukáži jak použít odhady v konkrétních příkladech.

Příklad 2 *Vyřešte následující rovnici pro počáteční podmínky* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$y'' + 2y' + y = 4\cos x\,.$$

Funkce $4\cos x$ je spojitá na $\mathbb{R}$, takže i řešení bude existovat a bude jednoznačné na $\mathbb{R}$.

Nejprve nalezneme fundamentální systém a tudíž i všechna homogenní řešení. Charakteristický polynom pro tuto rovnici je $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$. Ten má jeden kořen $\lambda = -1$, který je dvojnásobný. Z toho plyne, že fundamentální systém bude vypadat takto $\{e^{-x}, xe^{-x}\}$. Homogenní řešení lze tedy vyjádřit jako lineární kombinace prvků fundamentálního systému, t.j. $y_h = ae^{-x} + bxe^{-x}$.

Protože pravá strana naší rovnice je ve tvaru kvazipolynomu, můžeme odhadnout partikulární řešení pomocí postupu, který byl popsán na začátku kapitoly. Protože $4\cos x = e^{0x}[0\sin x + 4\cos x]$, bude odhad vypadat takto $y_p = A\sin x + B\cos x$. Dosadíme nyní tento odhad do naší rovnice. Musíme tedy spočítat první a druhou derivaci y_p.

$$\begin{aligned} y_p' &= A\cos x - B\sin x \\ y_p'' &= -A\sin x - B\cos x \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice dostaneme:

$$-A\sin x - B\cos x + 2(A\cos x - B\sin x) + A\sin x + B\cos x = 4\cos x\,.$$

Po úpravě tedy máme:

$$2A\cos x - 2B\sin x = 4\cos x + 0\sin x\,.$$

Porovnáním koeficientů u funkcí $\sin x$ a $\cos x$ na obou stranách rovnice vidíme, že $2A = 4$ a $-2B = 0$. Takže $A = 2$ a $B = 0$. Po dosazení do odhadu máme $y_p = 2\sin x$.

Obecné řešení dostaneme jako součet y_p a y_h:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = 2\sin x + ae^{-x} + bxe^{-x}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Nakonec zbývá z počátečních podmínek dopočítat konstanty a, b. Najdeme nejprve první derivaci obecného řešení.

$$y'(x) = 2\cos x - ae^{-x} + be^{-x} - bxe^{-x} = 2\cos x - ae^{-x} + b(1-x)e^{-x}\,.$$

Dosadíme poč. podmínky do výrazů pro $y(x)$ a $y'(x)$.

$$\begin{aligned} 1 &= 2\sin 0 + ae^0 + b0e^0 = a \\ 0 &= 2\cos 0 - ae^0 + b(1-0)e^0 = 2 - a + b \end{aligned}$$

Řešení této soustavy lin. rovnic je $a = 1$ a $b = -1$. Hledané řešení tedy je:

$$y(x) = 2\sin x + e^{-x} - xe^{-x}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Příklad 3 *Vyřešte následující rovnici pro počáteční podmínky* $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.

$$y'' - y' - 2y = x - e^{-2x}\,.$$

Funkce $x - e^{-2x}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, takže i řešení bude existovat a bude jednoznačné na $\mathbb{R}$.

Nejprve nalezneme fundamentální systém a tudíž i všechna homogenní řešení. Charakteristický polynom pro tuto rovnici je $\lambda^2 - \lambda - 2$. Ten má dva reálné jednonásobné kořeny $\lambda = -1, 2$. Z toho plyne, že fundamentální systém bude vypadat takto $\{e^{-x}, e^{2x}\}$. Homogenní řešení lze tedy vyjádřit jako lineární kombinace prvků fundamentálního systému, t.j. $y_h = ae^{-x} + be^{2x}$.

Protože pravá strana naší rovnice je součet dvou kvazipolynomů, můžeme odhadnout partikulární řešení pomocí postupu, který byl popsán na začátku kapitoly. Protože

$$x - e^{-2x} = e^{0x}[0 \sin 0x + x \cos 0x] + e^{-2x}[0 \sin 0x + (-1) \cos 0x] ,$$

bude odhad vypadat takto $y_p = A + Bx + Ce^{-2x}$. Dosadíme nyní tento odhad do naší rovnice. Musíme tedy spočítat první a druhou derivaci y_p.

$$\begin{aligned} y_p' &= B - 2Ce^{-2x} \\ y_p'' &= 4Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice dostaneme:

$$4Ce^{-2x} - (B - 2Ce^{-2x}) - 2(A + Bx + Ce^{-2x}) = x - e^{-2x} .$$

Po úpravě tedy máme:

$$-2A - B - 2Bx + 4Ce^{-2x} = 0 \cdot 1 + x - e^{-2x} .$$

Porovnáním koeficientů u funkcí x, e^{-2x} a konstatní funkce 1 na obou stranách rovnice vidíme, že

$$\begin{aligned} -2A - B &= 0 \\ -2B &= 1 \\ 4C &= -1 \end{aligned}$$

Takže $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{2}$ a $C = -\frac{1}{4}$. Po dosazení do odhadu máme $y_p = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-2x}$.

Obecné řešení dostaneme jako součet y_p a y_h:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-2x} + ae^{-x} + be^{2x} , \ x \in \mathbb{R} .$$

Nakonec zbývá z počátečních podmínek dopočítat konstanty a, b. Najdeme nejprve první derivaci obecného řešení.

$$y'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x} - ae^{-x} + 2be^{2x} .$$

Dosadíme poč. podmínky do výrazů pro $y(x)$ a $y'(x)$.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4}e^0 + ae^0 + be^0 = a + b \\ \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^0 - ae^0 + 2be^0 = -a + 2b \end{aligned}$$

Řešení této soustavy lin. rovnic je $a = \frac{1}{2}$ a $b = \frac{1}{2}$. Hledané řešení tedy je:

$$y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x} , \ x \in \mathbb{R} .$$

Příklad 4 *Vyřešte následující rovnici pro počáteční podmínky $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.*

$$y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \sin x .$$

Funkce $3e^{-x} \sin x$ je spojitá na $\mathbb{R}$, takže i řešení bude existovat a bude jednoznačné na $\mathbb{R}$.

Nejprve nalezneme fundamentální systém a tudíž i všechna homogenní řešení. Charakteristický polynom pro tuto rovnici je $\lambda^2 + 2\lambda + 5$. Ten má dva komplexně sdružené jednonásobné kořeny $\lambda = -1 \pm 2j$. Z toho plyne, že fundamentální systém bude vypadat takto $\{e^{-x} \sin 2x, e^{-x} \cos 2x\}$. Homogenní řešení lze tedy vyjádřit jako lineární kombinace prvků fundamentálního systému, t.j. $y_h = ae^{-x} \sin 2x + be^{-x} \cos 2x$.

Protože pravá strana naší rovnice je kvazipolynom, můžeme odhadnout partikulární řešení pomocí postupu, který byl popsán na začátku kapitoly. Protože

$$3e^{-x}\sin x = e^{-x}[3\sin x + 0\cos x]\,,$$

bude odhad vypadat takto $y_p = e^{-x}[A\sin x + B\cos x] = Ae^{-x}\sin x + Be^{-x}\cos x$. Dosadíme nyní tento odhad do naší rovnice. Musíme tedy spočítat první a druhou derivaci y_p.

$$\begin{aligned} y_p' &= -Ae^{-x}\sin x + Ae^{-x}\cos x - Be^{-x}\cos x - Be^{-x}\sin x = (A-B)e^{-x}\cos x - (A+B)e^{-x}\sin x \\ y_p'' &= -(A-B)e^{-x}\cos x - (A-B)e^{-x}\sin x + (A+B)e^{-x}\sin x - (A+B)e^{-x}\cos x = \\ &= 2Be^{-x}\sin x - 2Ae^{-x}\cos x \end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice dostaneme:

$$2Be^{-x}\sin x - 2Ae^{-x}\cos x + 2\left((A-B)e^{-x}\cos x - (A+B)e^{-x}\sin x\right) + 5(Ae^{-x}\sin x + Be^{-x}\cos x) = 3e^{-x}\sin x\,.$$

Po úpravě tedy máme:

$$3Ae^{-x}\sin x + 3Be^{-x}\cos x = 3e^{-x}\sin x\,.$$

Porovnáním koeficientů u funkcí $e^{-x}\sin x$ a $e^{-x}\cos x$ na obou stranách rovnice vidíme, že

$$\begin{aligned} 3A &= 3 \\ 3B &= 0 \end{aligned}$$

Takže $A = 1$ a $B = 0$. Po dosazení do odhadu máme $y_p = e^{-x}\sin x$.

Obecné řešení dostaneme jako součet y_p a y_h:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = e^{-x}\sin x + ae^{-x}\sin 2x + be^{-x}\cos 2x\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

Nakonec zbývá z počátečních podmínek dopočítat konstanty a, b. Najdeme nejprve první derivaci obecného řešení.

$$y'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x - ae^{-x}\sin 2x + 2ae^{-x}\cos 2x - be^{-x}\cos 2x - 2be^{-x}\sin 2x\,.$$

Dosadíme poč. podmínky do výrazů pro $y(x)$ a $y'(x)$.

$$\begin{aligned} 3 &= e^0\sin 0 + ae^0\sin 0 + be^0\cos 0 = b \\ -2 &= -e^0\sin 0 + e^0\cos 0 - ae^0\sin 0 + 2ae^0\cos 0 - be^0\cos 0 - 2be^0\sin 0 = 1 + 2a - b \end{aligned}$$

Řešení této soustavy lin. rovnic je $a = 0$ a $b = 3$. Hledané řešení tedy je:

$$y(x) = e^{-x}\sin x + 3e^{-x}\cos 2x\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$