11. přednáška

Rostislav Horčík

8. prosince 2006

1 Skalární součin

Definice 1 *Nechť L je lineární prostor. Operaci $\cdot\colon L \times L \to \mathbb{R}$ nazveme skalárním součinem, pokud $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ splňuje tyto vlastnosti:*

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
2. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$
3. $(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$
4. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ *a* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ *p.t.k.* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Lineární prostor, na kterém byl definován skalární součin, nazýváme lineárním prostorem se skalárním součinem.

Příklad Nechť $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Jestliže definujeme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$, pak $\cdot$ je skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Tento skalární součin nazýváme standardní.

Příklad Nechť $\boldsymbol{x} = (\alpha_2, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$. Jestliže definujeme

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

pak $\cdot$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$.

Věta 1 *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L$ platí:*

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x} = 0$,
2. $\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}$.

Důkaz:

1. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \cdot \boldsymbol{x} = (0 \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x} = 0 \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = 0$,
2. $\boldsymbol{z} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{y}$.

□

Definice 2 *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem. Pro $\boldsymbol{x} \in L$ definujeme jeho velikost $|\boldsymbol{x}|$ hodnotou $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$, tj. $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$.*

Pozorování 1 *Máme $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$, takže $\sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ je definováno a $|\boldsymbol{x}| = 0$ p.t.k. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.*

Věta 2 *Nechť $\boldsymbol{x}$ je prvkem lineárního prostoru se skalárním součinem a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $|\alpha \cdot \boldsymbol{x}| = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{x}|$.*

DŮKAZ: $|\alpha \cdot \boldsymbol{x}| = \sqrt{(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x})} = \sqrt{\alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{x}))} = \sqrt{\alpha \cdot ((\alpha \cdot \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{x})} = \sqrt{\alpha \cdot (\alpha \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}))} = \sqrt{\alpha^2 \cdot (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})} = |\alpha| \cdot \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = |\alpha| \cdot |\boldsymbol{x}|$. □

Věta 3 (Schwartzova nerovnost) *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem a $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$. Pak $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$.*

DŮKAZ: Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$0 \leq (\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - \alpha \cdot 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + \alpha^2 \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}) .$$

Označme $A = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{y}|^2$, $B = -2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$ a $C = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2$. Takže

$$0 \leq A\alpha^2 + B\alpha + C .$$

Protože tato nerovnost platí pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, diskriminant $A\alpha^2 + B\alpha + C$ nemůže být kladný, tj. $B^2 - 4AC \leq 0$. Takže $B^2 \leq 4AC$. Protože $B^2 = (-2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})) = 4(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2$ a $4AC = 4|\boldsymbol{x}|^2 \cdot |\boldsymbol{y}|^2$, dostaneme $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq |\boldsymbol{x}|^2 \cdot |\boldsymbol{y}|^2$, tj. $\sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2} \leq \sqrt{|\boldsymbol{x}|^2}\sqrt{|\boldsymbol{y}|^2}$. Takže $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$. □

Věta 4 (Trojúhelníková nerovnost) *Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou prvky lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$.*

DŮKAZ: $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2 \cdot \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \leq |\boldsymbol{x}|^2 + 2 \cdot |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}|^2 = (|\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|)^2$. □

Definice 3 *Nechť L je lineární prostor se skalárním součinem, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Pak uhel φ mezi $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ je definován vztahem:*

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} .$$

Pozorování 2 *Díky Schwartzově nerovnosti máme*

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|} \leq 1 .$$

Definice 4 *Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou prvky lineárního prostoru se skalárním součinem t.ž. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Pak říkáme, že $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou na sebe kolmé (značíme $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$), pokud $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$.*

Definice 5 *Nechť $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ je báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Bázi B nazýváme ortogonální, pokud $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ pro $i \neq j$. Pokud navíc pro všechna i platí $|\boldsymbol{b}_i| = 1$, pak nazýváme bázi B ortonormální.*

Věta 5 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální uspořádaná báze lineárního prostoru* L *se skalárním součinem. Pak pro všechny* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ *t.ž.* $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *a* $[\boldsymbol{y}]_B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ *platí:*

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n\,.$$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= (\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \cdot + \alpha_n\boldsymbol{b}_n) \cdot (\beta_1\boldsymbol{b}_1 + \cdot + \beta_n\boldsymbol{b}_n) = \\ &= \alpha_1\beta_1\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 + \alpha_1\beta_2\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_1\beta_n\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_n + \alpha_2\beta_1\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\beta_2\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n\boldsymbol{b}_n\cdot\boldsymbol{b}_n = \\ &= \alpha_1\beta_1\cdot 1 + \alpha_1\beta_2\cdot 0 + \cdots + \alpha_1\beta_n\cdot 0 + \alpha_2\beta_1\cdot 0 + \alpha_2\beta_2\cdot 1 + \cdots + \alpha_n\beta_n\cdot 1 = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n\,. \end{aligned}$$

□

Důsledek 1 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální uspořádaná báze lineárního prostoru* L *se skalárním součinem a* $\boldsymbol{x} \in L$ *t.ž.* $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$*. Pak* $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$.

Příklad Nechť $\mathbb{R}^n$ je lineární prostor se standardním skalárním součinem. Pak standardní báze $\mathbb{R}^n$, tj. $\{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$ je ortonormální.

Tvrzení 1 *Nechť* $\mathbb{R}^3$ *je lineární prostor se standarním skalárním součinem,* $\boldsymbol{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ *a* $\boldsymbol{y} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$*. Pak* $|\boldsymbol{x}|$ *odpovídá velikosti vektoru* $\boldsymbol{x}$ *(tj. vzdálenosti bodu* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *od bodu* $(0,0,0)$*) a* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\varphi$*, kde* φ *je úhel, který svírají přímky dané vektory* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{y}$ *(tj. úhel definovaný pomocí skalárního součinu na začátku je skutečně úhel mezi vektory).*

DŮKAZ: Podle Důsledku 1 je $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$, což je ale skutečně velikost podle Pythagorovy věty.

Nechť T je trojúhelník určený body $(0,0,0)$, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ a $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$. Velikosti vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ odpovídají velikostem stran trojúhelníka T. Z kosinovy věty dostaneme $|\boldsymbol{z}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají strany dané vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Máme

$$|\boldsymbol{z}|^2 = \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 - 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2\,.$$

Dosadíme-li do vztahu z kosinovy věty dostaneme:

$$|\boldsymbol{x}|^2 - 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + |\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 - 2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\varphi\,,$$

z čehož plyne, že $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\varphi$. □

Věta 6 *Nechť* $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ *jsou navzájem kolmé nenulové vektory lineárního prostoru se skalárním součinem, tj.* $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = 0$ *pro* $i \neq j$ *a* $\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_i > 0$*. Pak konečná množina* $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ *je lineárně nezávislá.*

DŮKAZ: Řešme rovnici

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}\,.$$

Vynásobíme-li skalárně obě strany rovnice vektorem $\boldsymbol{x}_i$, dostaneme $\alpha_i\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{x}_i = 0$, protože $\boldsymbol{x}_j\cdot\boldsymbol{x}_i = 0$ pro $i \neq j$. Protože $\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{x}_i > 0$, musí být $\alpha_i = 0$. Aplikujeme-li tento postup pro všechny $i \in \{1, \dots, n\}$, dostaneme $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. □

Věta 7 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem. Pak pro souřadnice libovolného vektoru* $\boldsymbol{x}$ *platí:*

$$[\boldsymbol{x}]_B = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\,.$$

DŮKAZ: Necht $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{b}_n$. Ukážeme, že $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{b}_i = ((\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_n)\boldsymbol{b}_n) \cdot \boldsymbol{b}_i = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i\,,$$

protože $\boldsymbol{b}_j \cdot \boldsymbol{b}_i = 0$ pro $i \neq j$ a $\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{b}_i = 1$. Z předchozí rovnosti plyne $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{b}_i = 0$. Takže $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \perp \boldsymbol{b}_i$ pro všechny $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pokud $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, pak podle předchozí věty je množina $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\}$ lineárně nezávislá. Potom ale (B) není báze (spor). Takže $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. □

Důsledek 2 *Nechť* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je ortonormální báze lineárního prostoru se skalárním součinem a* $\boldsymbol{x}$ *je jeho vektor. Pokud* $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*, pak pro úhel* φ_i *mezi vektory* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{b}_i$ *platí:*

$$\cos \varphi_i = \frac{\alpha_i}{|\boldsymbol{x}|}\,.$$

DŮKAZ:

$$\cos \varphi_i = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i}{|\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{b}_i|} = \frac{\alpha_i}{|\boldsymbol{x}|}\,.$$

□

Věta 8 (Schmidtův ortogonalizační proces) *Nechť* L *je lineární prostor konečné dimenze se skalárním součinem. Pak v* L *existuje ortonormální báze.*