2. přednáška

Rostislav Horčík

9. října 2006

1 Operace se zobrazeními

Definice 1 *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení a $c \in \mathbb{R}$. Definujeme zobrazení $f + g : X \to \mathbb{R}$, $fg : X \to \mathbb{R}$ a $cf : X \to \mathbb{R}$ takto:*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\\ (cf)(x) &= cf(x)\end{aligned}$$

Značení:

- $\bar{0} : X \to \mathbb{R}$, t.ž. $\bar{0}(x) = 0$.
- $\bar{1} : X \to \mathbb{R}$, t.ž. $\bar{1}(x) = 1$.
- Zobrazení cf pro $c = -1$ budeme značit $-f$.

Věta 1 *Nechť $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}$ a $h : X \to \mathbb{R}$ jsou zobrazení a $b, c \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

1. $f + g = g + f$, $f + (g + h) = (f + g) + h$, $f + \bar{0} = f$, $(f + (-g))(x) = f(x) - g(x)$ *pro všechna* $x \in X$.
2. $fg = gf$, $f(gh) = (fg)h$, $f\bar{1} = f$, $f\bar{0} = \bar{0}$, $f(g + h) = fg + fh$.
3. $c(bf) = (cb)f$, $(c + b)f = cf + bf$, $c(f + g) = cf + cg$, $1f = f$ *a* $0f = \bar{0}$.

Důkaz:

1. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$, druhá rovnost plyne z komutativity sčítání reálných čísel (tj. $a + b = b + a$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$).
2. $(f + (-g))(x) = f(x) + (-g)(x) = f(x) + (-1)g(x) = f(x) - g(x)$.
3. $(f(g+h))(x) = f(x)\,(g+h)(x) = f(x)(g(x)+h(x)) = f(x)g(x)+f(x)h(x) = (fg)(x)+(fh)(x) = (fg + fh)(x)$.

$\square$

Zobrazení $f + (-g)$ budeme značit $f - g$.

2 Polynomy

Definice 2 *Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se nazývá reálný polynom, pokud existují $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývají* koeficienty. *Stručný zápis:*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,. \tag{1}$$

Zobrazení $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se nazývá komplexní polynom, pokud $\exists b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ t.ž. $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ pro všechna $x \in \mathbb{C}$.

Zobrazení $\bar{0}$ je polynom, který budeme nazývat *nulový polynom.* Množinu reálných (komplexních) polynomů značíme $\mathbb{R}[x]$ ($\mathbb{C}[x]$).

Pozorování 1 *Nechť f je reálný (komplexní) polynom t.ž. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Potom platí*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ &= 0x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ &= 0x^{n+2} + 0x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = \cdots \end{aligned}$$

Věta 2 *Množiny $\mathbb{R}[x]$ a $\mathbb{C}[x]$ jsou uzavřeny na operace $+, \cdot$ a násobení reálným (komplexním) číslem. Tj. $\forall f, g \in \mathbb{R}[x]$ a $\forall c \in \mathbb{R}$ platí $f + g \in \mathbb{R}[x]$, $fg \in \mathbb{R}[x]$ a $cf \in \mathbb{R}[x]$. Podobně pro $\mathbb{C}[x]$.*

Důkaz:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,, \qquad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \,. \tag{2}$$

Protáhneme f nebo g tak, aby měli stejný počet koeficientů. Pak

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \,.$$

$$(cf)(x) = cf(x) = c\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (ca_i) x^i \,.$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{m}\left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) b_j x_j\right] = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k \,,$$

kde

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \,.$$

□

Definice 3 *Nechť f je polynom t.ž. $f(x) = \sum_{i=0} a_i x^i$. Stupeň polynomu f ($\operatorname{st} f$) je největší $m \in \mathbb{N}$ t.ž. $a_m \neq 0$. $\operatorname{st} \bar{0} = -1$.*

Věta 3 *Nechť f, g jsou polynomy t.ž. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$. Pak $f = g$ p.t.k. $\operatorname{st} f = \operatorname{st} g$ a $a_i = b_i$ pro všechna $i \in \{0, \dots, \operatorname{st} f\}$.*

Důkaz: Sporem: pokud $m \neq n$, pak prodloužíme f a g na stejný počet koeficientů. Máme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) x^i = 0$$

Existuje polynom h t.ž. $h(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$. □

Věta 4 *Nechť f a g jsou polynomy. Pak platí:*

1. $\operatorname{st} f \pm g \leq \max\{\operatorname{st} f, \operatorname{st} g\}$.
2. $\operatorname{st} cf = \operatorname{st} f$ *pro* $c \neq 0$.
3. $\operatorname{st} fg = \operatorname{st} f + \operatorname{st} g$ *pokud* $f, g \neq \bar{0}$.

Věta 5 *Nechť f, g jsou polynomy a $g \neq \bar{0}$. Pak $\exists$ jednoznačně určené polynomy p a z t.ž. $f = gp + z$ a $\operatorname{st} z < \operatorname{st} g$.*

Důkaz: □

Existence plyne z algoritmu dělení polynomů. Jednoznačnost dokážeme sporem. Přepokládáme, že existují polynomy p_1, p_2, z_1, z_2 t.ž. $p_1 \neq p_2$ nebo $z_1 \neq z_2$ a

$$f = gp_1 + z_1\,,\ \ f = gp_2 + z_2\,,\ \ \operatorname{st} z_1 < \operatorname{st} g\,,\ \ \operatorname{st} z_2 < \operatorname{st} g\,.$$

$$gp_1 + z_1 = gp_2 + z_2$$
$$g(p_1 - p_2) = z_2 - z_1$$

Protože $p_1 - p_2 \neq \bar{0}$ a $g \neq \bar{0}$ máme:

$$\operatorname{st} g(p_1 - p_2) = \operatorname{st} g + \operatorname{st}(p_1 - p_2) = \operatorname{st}(z_2 - z_1) \leq \max\{\operatorname{st} z_2, \operatorname{st} z_1\} < \operatorname{st} g$$

Jedině když $\operatorname{st}(p_2 - p_1) = -1$, tj. $p_1 = p_2$. A tudíž

$$z_2 - z_1 = g(p_1 - p_2) = g\bar{0} = \bar{0}$$

□

Definice 4 *Nechť f, g jsou polynomy. Říkáme, že f je dělitelný g (g dělí f), pokud $z = \bar{0}$.*

Příklad na dělení.

$$(2x^5 - x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x + 1) : (x^3 + x^2 - x + 1)$$

3 Hornerovo schema

$$\begin{aligned} f(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= (a_4x + a_3)x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= ((a_4x + a_3)x + a_2)x^2 + a_1x + a_0 \\ &= (((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

$$f(x_0) = (((a_4x_0 + a_3)x_0 + a_2)x_0 + a_1)x_0 + a_0$$

$$\begin{aligned} b_4 &= a_4 \\ b_3 &= b_4x_0 + a_3 \\ b_2 &= b_3x_0 + a_2 \\ b_1 &= b_2x_0 + a_1 \\ b_0 &= b_1x_0 + a_0 \end{aligned}$$

Pak

$$f(x_0) = b_0\,, \quad f(x) = (x - x_0)(b_4x^3 + b_3x^2 + b_2x + b_1) + b_0\,.$$

$$\begin{array}{cccccc} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ x_0 & & b_4x_0 & b_3x_0 & b_2x_0 & b_1x_0 \\ \hline & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array}$$

Priklad

$$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 6\,, \qquad x_0 = -2$$

4 Kořeny

Definice 5 *Nechť f je nenulový polynom. Reálné (komplexní) číslo c nazveme kořenem f, pokud $f(c) = 0$.*

Věta 6 *Komplexní číslo c je kořenem polynomu f p.t.k. f je dělitelný polynomem $x - c$.*

Důkaz:

($\Rightarrow$) Nechť $f(c) = 0$. $f = (x - c)p + z$ a $\mathrm{st}\, z < \mathrm{st}\,(x - c) = 1$. Takže $\mathrm{st}\, z = 0$ nebo $\mathrm{st}\, z = -1$. Polynom z je tedy konstatní, tj. $z(x) = b$ pro nějaké $b \in \mathbb{R}$. Máme tedy:

$$f(x) = (x - c)p(x) + b$$

Protože c je kořen, dostaneme:

$$0 = f(c) = (c - c)p(c) + b = 0p(c) + b = b$$

($\Leftarrow$) Nechť $f(x) = (x - c)p(x)$. Pak $f(c) = (c - c)p(c) = 0$. Takže c je kořen.

$\square$

Definice 6 *Nechť f je polynom. Reálné (komplexní) číslo c nazveme k-násobným kořenem f, pokud k je největší přirozené číslo t.ž. $(x-c)^k$ dělí f. Číslo k se nazývá násobnost.*

Věta 7 (Základní věta algebry) *Každý $f \in \mathbb{C}[x]$ t.ž. $\operatorname{st} f \geq 1$ má alespoň jeden kořen.*

Důsledek 1 *Nechť $f \in \mathbb{C}$ t.ž. $\operatorname{st} f = n \geq 1$ a $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Pak*

$$f(x) = a_n (x-c_1)^{k_1} (x-c_2)^{k_2} \cdots (x-c_m)^{k_m} \,,$$

pro nějaká $b, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ a $k_1, \dots, k_m, m \in \mathbb{N}$. Navíc $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$.

Důkaz: Inkukcí podle stupně.

1. Pro $n = 1$ platí, protože $a_1 x + a_0 = a_1(x + \frac{a_0}{a_1})$.

2. Nechť $\operatorname{st} f = n$. Podle ZVA má f kořen, tj. $f = (x-c)^k p$. Zřejmě

   $$n = \operatorname{st} f = \operatorname{st} (x-c)^k + \operatorname{st} p = k + \operatorname{st} p$$

   $$\operatorname{st} p = n - k$$

   Z indukčního předpokladu:

   $$p = b(x-c_1)^{k_1} \cdots (x-c_m)^{k_m} \,, \qquad n - k = k_1 + \cdots + k_m \,.$$

   Dosazením:

   $$f = (x-c)^k p = b(x-c)^k (x-c_1)^{k_1} \cdots (x-c_m)^{k_m}$$

   Zřejmě $b = a_n$.

$\square$

Věta 8 *Nechť $f \in \mathbb{C}[x]$ s reálnými koeficienty a $c = a + bi$ je jeho k-násobný kořen. Pak $\overline{c} = a - bi$ je také k-násobný kořen f.*

Důkaz: Nechť $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Pak

$$\overline{f(x)} = \overline{a_n x^n + \cdots + a_0} = \overline{a_n}(\overline{x})^n + \cdots + \overline{a_0} = a_n(\overline{x})^n + \cdots + a_0 = f(\overline{x}) \,.$$

Protože $\overline{f(x)} = f(\overline{x})$ a $\overline{\overline{x}}$, máme $f(x) = \overline{f(\overline{x})}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \overline{f(\overline{x})} = \overline{(\overline{x}-c)^k (b_n(\overline{x})^n + \cdots + b_0)} \\ &= (\overline{\overline{x}} - \overline{c})^k (\overline{b}_n (\overline{\overline{x}})^n + \cdots + \overline{b}_0) \\ &= (x - \overline{c})^k (\overline{b}_n x^n + \cdots + \overline{b}_0) \end{aligned}$$

$\square$

Důsledek 2 *Nechť* $f \in \mathbb{R}[x]$ *a* $\operatorname{st} f$ *je lichý. Pak* f *má alespoň jeden reálný kořen.*

Věta 9 *Nechť* $f \in \mathbb{R}[x]$. *Pak*

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_m)^{k_m}(x^2 + b_1x + d_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_rx + d_r)^{l_r} .$$

DŮKAZ:

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_m)^{k_m}$$

Když se $(x - c_i)^{k_i}$ vyskytuje v rci nahoře, pak se $(x - \overline{c_i})^{k_i}$ vyskytuje také. Můžeme je roznásobit:

$$(x - c_i)^{k_i}(x - \overline{c_i})^{k_i} = (x^2 - (c_i + \overline{c_i})x + c_i\overline{c_i})^{k_i} = (x^2 - 2\mathrm{Re}(c_i)x + |c_i|^2)^{k_i}$$

$\square$

Definice 7 *Nechť* $f \in \mathbb{R}[x]$. *Řekneme, že* f *je ireducibilní nad tělesem* $\mathbb{R}$, *pokud neexistují* $g, h \in \mathbb{R}[x]$ *t.ž.* $f = gh$ *a* $\operatorname{st} g, \operatorname{st} h \geq 1$.

Důsledek 3 *Polynom* $f \in \mathbb{R}[x]$ *je ireducibilní p.t.k.* $\operatorname{st} f = 1$ *nebo* $\operatorname{st} f = 2$ *a* f *má pouze komplexní kořeny.*

Věta 10 *Nechť* $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ *je polynom stupně* n *a* $a_i \in \mathbb{Z}$. *Pokud* $f(\frac{p}{q}) = 0$, *kde* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *a* p, q *jsou nesoudělná, pak* p *dělí* a_0 *a* q *dělí* a_n.

DŮKAZ: Dosadíme $\frac{p}{q}$ do $f(x)$:

$$0 = f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0$$

Vynásobíme q^n:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

Tudíž:

$$a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1})$$
$$a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1q^{n-1})$$

Takže q dělí a_np^n a protože p, q jsou nesoudělná, dělí i a_n. Podobně p dělí a_0. $\square$

Příklad:

$$3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 6$$
$$p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}, \qquad q \in \{\pm1, \pm3\}$$
$$\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\}$$