8. přednáška

Rostislav Horčík

16. listopadu 2006

1 Soustavy lineárních rovnic

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

Pokud označíme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pak místo (1) můžeme psát stručněji $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Matici $\mathbf{A}$ nazýváme maticí soustavy (1), vektor $\boldsymbol{b}^T = (b_1, \ldots, b_m)$ vektorem pravých stran a vektor $\boldsymbol{x}^T = (x_1, \ldots, x_n)$ vektorem neznámých. Matici $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$ nazýváme rozšířenou maticí soustavy.

Poznámka 1 *Ačkoliv $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{b}$ jsou jednosloupcové matice a ne vektory, budeme s nimi běžně pracovat jako s vektory, protože je většinou z kontextu jasné, kdy je máme chápat jako jednosloupcové matice.*

Všimeme si také, že soustava (1) lze přepsat takto:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

To znamená, že pokud vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je jejím řešením, pak vlastně vektor $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací sloupců matice $\mathbf{A}$ a koeficienty této lineární kombinace jsou právě $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Věta 1 (Frobeniova) *Soustava $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení p.t.k.* $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$.

Důkaz: Vektor $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ je řešením soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ p.t.k. $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací sloupců $\mathbf{A}$ s koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. To znamená, že soustava $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení p.t.k. $\boldsymbol{b}^T \in \langle \mathbf{A}^T \rangle$ to je p.t.k. $\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{A}^T \rangle$ a to je p.t.k. $\operatorname{hod} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} = \operatorname{hod} \mathbf{A}^T$. Protože pro každou matici $\mathbf{B}$ máme $\operatorname{hod} \mathbf{B}^T = \operatorname{hod} \mathbf{B}$, dostaneme $\operatorname{hod} (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b}) = \operatorname{hod} \mathbf{A}$. $\square$

Definice 1 *Nechť* $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *a* $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ *jsou soustavy lineárních rovnic. Říkáme, že tyto soustavy jsou ekvivalentní, pokud mají stejné množiny řešení.*

Věta 2 *Ke každé soustavě* $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *lze nalézt ekvivalentní soustavu* $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$*, kde* $\mathbf{C}$ *je horní trojúhelníková.*

Důkaz: Zřejmě $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b}) \sim (\mathbf{C} \mid \boldsymbol{d})$, kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková. Stačí tedy ukázat, že soutavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ jsou ekvivalentní. Protože $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b}) \sim (\mathbf{C} \mid \boldsymbol{d})$, existuje regulární matice $\mathbf{P}$ t.ž.

$$(\mathbf{C} \mid \boldsymbol{d}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{c}) .$$

Takže $\mathbf{C} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ a $\boldsymbol{d} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{b}$.

Nechť $\boldsymbol{a}$ je řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, tj. $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Pak $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{b}$, tj. $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$. Obráceně, nechť $\boldsymbol{z}$ je řešením $\mathbf{C} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$. Pak $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{z} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{b}$. Vynásobením maticí $\mathbf{P}^{-1}$ zleva dostaneme $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$. □

Definice 2 *Nechť* $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *je soustava lin. rovnic a* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$*. Pak nazýváme tuto soustavu homogenní.*

Věta 3 *Množina* M *řešení homogenní soustavy* $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ *o* n *neznámých tvoří lin. podprostor lin. prostoru* $\mathbb{R}^n$*.*

Důkaz: Zřejmě $\boldsymbol{o} \in M$. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in M$ a $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $\mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$ a $\mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \boldsymbol{u}) = \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u}) = \alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$. Takže $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in M$ a $\alpha \cdot \boldsymbol{u} \in M$. □

Věta 4 *Nechť* $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ *je homogenní soustava lin. rovnic o* n *neznámých a* $M = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}\}$*. Pak* $\dim M = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$*.*

Důkaz: Víme, že $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{o}) \sim (\mathbf{C} \mid \boldsymbol{o})$, kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková, jejíž počet nenulových řádků je hod $\mathbf{A}$. Na popis řešení budeme tedy potřebovat $k = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$ parametrů $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}$. Nechť tedy $x_{i_1} = p_1, \ldots, x_{i_k} = p_k$. Protože vektor pravých stran je nulový, můžeme ostatní složky řešení vyjádřit jako lineární kombinace parametrů $p_1, \ldots, p_k$. To znamená, že libovolné řešení můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$(x_1, \ldots, x_n) = p_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + p_n \boldsymbol{u}_n .$$

Takže $M = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$. Zbývá ukázat, že $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ je LN. Nechť

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o} .$$

Protože $\boldsymbol{u}_1$ má na pozici i_1 číslo 1 a ostatní vektory $\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ nulu, platí pro i_1 složku $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha_1 = 0$. Podobně ukážeme, že i $\alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. □

Příklad Najděte bázi a dimenzi lin. prostoru M všech řešení následující homogenní soustavy lin. rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Nechť $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$. Volme $x_5 = p_1$ a $x_4 = p_2$. Z rovnice $x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0$ dostaneme $x_3 = -2p_2 - 3p_1$. Dále volme $x_2 = p_3$. Z rovnice $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0$ dostaneme

$$x_1 = -2p_3 - 3(-2p_2 - 3p_1) - 4p_2 - 5p_1 = -2p_3 + 2p_2 + 4p_1 \,.$$

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (-2p_3 + 2p_2 + 4p_1, p_3, -2p_2 - 3p_1, p_2, p_1) = \\ &= p_1(4, 0, -3, 0, 1) + p_2(2, 0, -2, 1, 0) + p_3(-2, 1, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

Množina $\{(4, 0, -3, 0, 1), (2, 0, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 0, 0)\}$ je báze lin. prostoru M a $\dim M = 3$. Ukažme, že $\{(4, 0, -3, 0, 1), (2, 0, -2, 1, 0), (-2, 1, 0, 0, 0)\}$ je LN.

$$\alpha_1(4, 0, -3, 0, 1) + \alpha_2(2, 0, -2, 1, 0) + \alpha_3(-2, 1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0) \,.$$

Ukážeme např. že $\alpha_2 = 0$. Parametr p_2 odpovídá čtvrté složce řešení x_4. Pro čtvrtou složku z předchozí rovnice tedy máme $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$, tj. $\alpha_2 = 0$.

Definice 3 *Nechť $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je nehomogenní soustava lin. rovnic a $\boldsymbol{v}$ je jedno její řešení. Pak $\boldsymbol{v}$ nazýváme partikulární řešení a soustavu $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ nazýváme přidruženou homogenní soustavou k $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Věta 5 *Nechť $\boldsymbol{v}$ je partikulární řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a M_0 je lin. prostor řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pak pro množinu M všech řešení $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ platí:*

$$M = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in M_0\} \,.$$

DŮKAZ: Nejprve ukážeme, že $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ je řešení pro libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in M_0$. Máme

$$\mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b} \,.$$

Nyní ukážeme, že každé řešení $\boldsymbol{w} \in M$ lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}'$ pro nějaký vektor $\boldsymbol{u}' \in M_0$. Volme $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{u}' \in M_0$, protože

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u}' = \mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{w} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \,.$$

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$, důkaz je hotov. □

Pokud $\{\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}$ je báze lin. prostoru M_0 všech řešení přidružené homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, pak množinu řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ obvykle zapisujeme takto:

$$M = \boldsymbol{v} + M_0 = \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle \,.$$

Věta 6 (Cramerovo pravidlo) *Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice. Pak pro i-tou složku řešení soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ platí*

$$\alpha_i = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}} \,,$$

kde matice $\mathbf{B}_i$ je shodná s maticí $\mathbf{A}$ až na i-tý sloupec, který je nahrazen sloupcem pravých stran $\boldsymbol{b}$.

DŮKAZ: Protože $\mathbf{A}$ je regulární, máme $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$. Dále pro inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ platí:

$$\mathbf{A}^{-1} = (c_{ij}) = \left(\frac{D_{ji}}{\det \mathbf{A}} \right), \quad \text{kde } (D_{ij}) \text{ je matice doplňků k matici } \mathbf{A}.$$

Nechť $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, pak

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{D_{ji}}{\det \mathbf{A}} b_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (D_{1i} b_1 + \cdots + D_{ni} b_n) = \frac{\det \mathbf{B}_i}{\det \mathbf{A}}.$$

$\square$

Příklad Pro následující soustavu spočtěte neznámou x_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0+0+0-(3+0+0)}{0+2+9-(6+1+0)} = -\frac{3}{4}.$$

2 Maticové rovnice

Algoritmus Gaussovy eliminační metody lze jednoduše zobecnit na maticové rovnice tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$. Nechť $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ jsou sloupce matice $\mathbf{B}$ and $\boldsymbol{x}_1 \ldots, \boldsymbol{x}_k$ sloupce matice $\mathbf{X}$. Všimeme si, že rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ je ekvivalentní s k-ticí rovnic $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1, \ldots, \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{b}_k$, protože i-tý sloupec součinu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ závisí pouze na i-tém sloupci $\boldsymbol{x}_i$. Rovnice $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}_i$ jsou již normální soustavy lin. rovnic. Vzhledem k tomu, že mají všechny stejnou matici soustavy, lze je řešit jednou eliminací najednou, jen musíme matici soustavy rozšířit o všechny pravé strany $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$. Postupujeme takto:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{A} & \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_k \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{C} & \boldsymbol{d}_1 & \cdots & \boldsymbol{d}_k \end{array} \right),$$

kde $\mathbf{C}$ je horní trojúhelníková. Každý sloupec $\boldsymbol{x}_i$ matice $\mathbf{X}$ potom vyjádříme nezávisle ze soustavy $(\mathbf{C} \mid \boldsymbol{d}_i)$.

Příklad Řešte rovnici $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sloupec $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}$ získáme ze soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Nechť $x_{31} = p$, $p \in \mathbb{R}$. Z druhé rovnice $x_{21} + x_{31} = 0$ plyne $x_{21} = -p$. Z první rovnice $x_{11} + 2x_{21} + 4x_{31} = -1$ plyne $x_{11} = -1 - 2p$.

Podobně sloupec $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}$ získáme ze soustavy $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Nechť $x_{32} = t$, $t \in \mathbb{R}$. Z druhé rovnice $x_{22} + x_{32} = 1$ plyne $x_{22} = 1 - t$. Z první rovnice $x_{12} + 2x_{22} + 4x_{32} = 0$ plyne $x_{12} = -2 - 2t$. Dohromady

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 - 2p & -2 - 2t \\ -p & 1 - t \\ p & t \end{pmatrix}, \quad p, t \in \mathbb{R}\,.$$

Metodu je možné upravit i na rovnice tvaru $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Pomocí transpozice převedeme rovnici na $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$. Pomocí předchozího postupu nalezneme $\mathbf{X}^T$, tj. eliminuje matici $(\mathbf{A}^T \mid \mathbf{X}^T)$, a nakonec opět pomocí transpozice získáme $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^T)^T$.