1. Nechť L je lineární prostor dimenze 5 a U, V jsou jeho podprostory takové, že $\dim U = \dim V = 3$. Ukažte, že $U \cap V$ obsahuje nenulový vektor.

2. Dokažte, že axiom $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ není potřeba v definici lineárního prostoru. [Nápověda: začněte pracovat s výrazem $(1+1) \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.]

3. Nechť U, V jsou dva lineární podprostory lineárního prostoru L konečné dimenze takové, že $\dim U = \dim V$. Dokažte, že pokud $U \subseteq V$, pak už musí platit $U = V$.

4. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ jsou lineárně nezávislé vektory v lineárním prostoru P. Je možné, aby $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, pro nějaké vhodně zvolené $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in P$? Pokud ano, najděte příklad. Pokud ne, zdůvodněte, proč ne.

5. Dokažte, že podmnožina reálných čísel $\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ s operacemi $x \oplus y = xy$ a $r \odot x = x^r$ je lineární prostor.

   Jsou vektory $x = 2$ a $y = 3$ lineárně závislé či nezávislé? Jaké vektory jsou v lineárním obalu $\langle 2 \rangle$? Najděte nějakou bázi daného prostoru. Popište jeho podprostory.

6. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu 2×2. Dokažte, že $K_A = \{\mathbf{B} \in Mat_{2\times2} \mid \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$ je podprostor v $Mat_{2\times2}$.

   a) Pro které matice je $\dim K_A = 4$?

   b) Dokažte, že $\dim K_A \neq 1$? [Návod: Najděte aspoň dvě lineárně nezávislé matice z daného podprostoru.]

   c) Dokažte, že $\dim K_A \neq 3$? [Návod: Napište si obecně soustavu rovnic, která vyplývá ze vztahu $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ a ukažte, že nemůže mít trojparametrické řešení.]

   d) Dokažte, že pro regulární $\mathbf{A} \neq r\mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice, je $\mathbf{A}^{-1}$ lineární kombinací matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$.

7. Nechť $L = \{f \mid f\colon \mathbf{R} \to \langle -1, 1 \rangle\}$ je množina všech zobrazení z množiny reálných čísel do reálného intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. Definujme na L operace $\oplus$ a $\odot$ výrazy:

$$(f \oplus g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}\,, \qquad (\lambda \odot f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } \lambda \neq 0\,, \\ 0 & \text{pro } \lambda = 0\,. \end{cases}$$

   Je množina L s operacemi $\oplus$ a $\odot$ lineární prostor?

8. Napište matici lineárního zobrazení z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}^2$, které otáčí vektory v rovině kolem počátku o úhel φ. Pomocí této matice nalezněte pro libovolné $n \geq 1$ aspoň jedno řešení maticové rovnice $\mathbf{X}^n = \mathbf{E}$.