A

1. a) (3 BODY) Definujte pojem kořene polynomu. Nechť $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ je polynom, kde a_0, a_1, a_2 jsou celá čísla. Může být číslo $\sqrt{2}$ jeho kořenem, když víme, že $a_2 = 1$? V případě, že ano, napište příklad takového polynomu. V případě, že ne, napište proč ne.

Odpověď: Nechť f je nenulový polynom. Pak číslo c nazýváme kořenem polynomu f, pokud $f(c) = 0$ (1 bod). Otázka zkouší, jestli studenti pochopili větu říkající, že pro racionální kořen $\frac{r}{s}$ polynomu s celočíselnými koeficienty platí: r dělí a_0 a s dělí a_n. Věta je ve tvaru implikace, takže když v našem případě $a_2 = 1$, tak všechny racionální kořeny musí být celočíselné. Nicméně polynom klidně může mít nějaký iracionální kořen. Takže odpověď je ano (1 bod) a příklad takového polynomu je např. x^2-2 (1 bod). Malou nápovědu dostanou v části b), protože zadaný polynom $f(x)$ má kořen $\sqrt{2}$.

b) (3 BODY) Rozložte na součin kořenových činitelů a uveďte násobnosti jednotlivých kořenů.

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4\,.$$

Odpověď: $f(x) = 2(x-2)(x+\frac{1}{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ (2 body). Všechny kořeny jsou jednonásobné (1 bod).

2. a) (3 BODY) Definujte hodnost matice. Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu $(3, 4)$. Je možné aby homogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ měla pouze jedno řešení? Pokud ano, jak by musela matice $\mathbf{A}$ vypadat? Pokud ne, tak uveďte proč ne.

Odpověď: Hodnost matice je dimenze lineárního obalu řádků matice (1 bod). Soustava $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ nemůže mít pouze jedno řešení, protože množina řešení homogenní soustavy tvoří lineární prostor, jehož dimenze je v našem případě $4 - \operatorname{hod} \mathbf{A} \geq 1$ ($\operatorname{hod} \mathbf{A} \leq 3$). Vzhledem k tomu, že jedno nebo vícedimenzionální lineární prostor je nekonečný, nemůže mít soustava právě jedno řešení (2 body).

b) (3 BODY) Nalezněte dimenzi a nějakou bázi vektorového prostoru všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Odpověď: Množina řešení je $\langle(-6, 1, -2, 0), (-7, 0, -2, 1)\rangle$ (1 bod), báze je např. $\{(-6, 1, -2, 0), (-7, 0, -2, 1)\}$ (1 bod), dimenze je 2 (1 bod).

3. a) (4 BODY) Napište definici lineárního podprostoru. Nechť L je lineární prostor konečné dimenze a M, N jsou jeho podprostory takové, že $\dim M = 5$ a $\dim N = 4$. Spočtěte $\dim M \vee N$, když víte, že $\dim M \cap N = 2$. Kolik minimálně musí být dimenze L?

Odpověď: Nechť L je lineární prostor. Pak lineární podprostor lin. prostoru L je neprázdná podmnožina $M \subseteq L$, která je uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem, tj. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in M$ a $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in M$ (2 body). Vzhledem k tomu že $5 + 4 = \dim M + \dim N = \dim M \vee N + \dim M \cap N = \dim M \vee N + 2$, dostaneme $\dim M \vee N = 7$ (1 bod). Protože $M \vee N \subseteq L$, musí $\dim L$ nutně být alespoň 7 (1 bod).

b) (4 BODY) V $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Nechť M je lineární obal vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ (tj. $M = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$) a N je lineární obal vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (tj. $N = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$). Najděte dimenzi a nějakou bázi spojení lineárních podprostorů $M \vee N = \langle M \cup N\rangle$ a dimenzi $M \cap N$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (1, 1, 1, 2) \qquad & \boldsymbol{u} &= (1, 1, 5, 2) \\ \boldsymbol{b} &= (2, 3, 4, 6) \qquad & \boldsymbol{v} &= (0, -1, 2, -2) \end{aligned}$$

Odpověď: Protože $M \vee N = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ a Gaussova eliminační metoda zachovává lineární obaly řádků matice, můžeme najít bázi $M \vee N$ takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože nenulové řádky horní trojúhelníkové matice jsou lineárně nezávislé, máme $\dim M \vee N = \operatorname{hod} \mathbf{A} = 3$ (2 body) a báze je např. $\{(1, 1, 1, 2), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 4, 0)\}$ (1 bod). Nakonec dostaneme $\dim M \cap N = \dim M + \dim N - \dim M \vee N = 2 + 2 - 3 = 1$ (1 bod).

B

1. a) (4 BODY) Definujte pojem inverzní matice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu $(5,5)$. Kolik bude hodnost matice $\mathbf{A}^T$, když víme, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$ (tj. $\mathbf{A}$ je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí).

Odpověď: Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (n,n). Matici $\mathbf{B}$ typu (n,n) nazýváme inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$, pokud splňuje $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ (1 bod). Matice $\mathbf{A}$ je regulární (tj. $\mathbf{A}^{-1}$ existuje) právě tehdy když $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$. Navíc matice $\mathbf{A}$ (typu $(5,5)$) je regulární právě tehdy když $\operatorname{hod}\mathbf{A} = 5$. Protože $\operatorname{hod}\mathbf{A}^T = \operatorname{hod}\mathbf{A}$, dostaneme $\operatorname{hod}\mathbf{A}^T = 5$ (3 body).

b) (4 BODY) Nalezněte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{AXA} = \mathbf{BA}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odpověď: $\mathbf{A}$ je regulární, protože $\det\mathbf{A} = -1 \neq 0$. Pro matici $\mathbf{X}$ tedy dostaneme

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BAA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \qquad (1 \text{ bod}).$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2 \text{ body}).$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (1 \text{ bod}).$$

2. a) (3 BODY) Definujte pojem souřadnic vektoru vzhledem k nějaké uspořádané bázi. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L. Jaké souřadnice bude mít v této bázi vektor $\boldsymbol{b}_i$?

Odpověď: Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L a $\boldsymbol{x} \in L$. Pak $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ nazýváme souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ vzhledem k bázi (B), pokud platí $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n$ (2 body). Vektor $\boldsymbol{b}_i$ bude mít souřadnice $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, kde 1 se vyskytuje na i-té pozici (1 bod).

b) (3 BODY) Nechť L je lineární prostor polynomů stupně nejvýše 3 a $(B) = (1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3)$ je jeho uspořádaná báze. Najděte souřadnice polynomu $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ v této bázi.

Odpověď: Souřadnice f v bázi (B) jsou $(-4, 10, -7, 2)$ (3 body).

3. a) (3 BODY) Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m,n) a $\boldsymbol{b}$ je vektor z $\mathbb{R}^n$. Za jakých podmínek a jak můžeme najít i-tou neznámou soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pomocí Cramerova pravidla?

Odpověď: Matice $\mathbf{A}$ musí být čtvercová (tj. $m = n$) a regulární (1 bod). Pak $x_i = \det\mathbf{B}_i / \det\mathbf{A}$, kde $\mathbf{B}_i$ je matice stejná jako matice $\mathbf{A}$ až na i-tý sloupec, který je nahrazen vektorem $\boldsymbol{b}$ (2 body).

b) (3 BODY) Nechť $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Vyřešte soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Odpověď: $\det\mathbf{A} = -(p-3)(p+1)$ (1 bod). Pro $p \neq 3, -1$ je jediné řešení $\left(\frac{2p+3}{(p-3)(p+1)}, -\frac{p+6}{(p-3)(p+1)}, -\frac{p^2+p-3}{(p-3)(p+1)}\right)$ (2 body). Pro $p = 3$ a $p = -1$ nemá řešení (1 bod).