Přesun okrajových úloh pro samoadjungovanou okrajovou úlohu pro diferenciální rovnice $2n$-tého řádu [1]

Jiří Taufer

Zabýváme se okrajovou úlohou pro samoadjungovanou diferenciální rovnici $2n$-tého řádu:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(p_{n-i}(t)y^{(i)}(t))^{(i)} = q(t), \tag{1}$$

kde koeficienty rovnice splňují následující podmínky:

$$q(t), 1/p_0(t), p_i(t) \in \mathcal{L}_{(a,b)} \qquad \text{pro}\, i = 1, ..., n.$$

Abychom mohli snadněji formulovat okrajové podmínky, zaveďme si nejdříve pojem kvasiderivace. Říkáme, že funkce $y(t)$ má kvasiderivace až do $2n$-tého řádu, jestliže existuje $2n$ funkcí:

$$\begin{aligned} y^{[k]}(t) &= y^{(k)}(t) \qquad \text{pro}\, k = 1, 2, ..., n-1, \\ y^{[n]}(t) &= p_0(t)y^{(n)}(t), \\ y^{[n+j]}(t) &= p_j(t)y^{(n-j)}(t) - (y^{[n+j-1]}(t))', \quad \text{pro}\, j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Dodefinujme $y^{[0]}(t) = y(t)$ a položme $x_i(t) = y^{[i-1]}(t)$ pro $i = 1, ..., 2n$. Zaveďme vektor $x(t) = (x_1(t), ..., x_{2n}(t))^T$.
Uvažujme nyní okrajové podmínky ve tvaru

$$W_1x(a) + W_2x(b) = w, \tag{2}$$

kde W_1 a W_2 jsou čtvercové matice řádu $2n$ a vektor w má $2n$ složek.

Rozdělme matice W_1 a W_2 na bloky:

$$W_1 = (B_1, B_2), \quad W_2 = (B_3, B_4),$$

kde matice B_i $(i = 1, \ldots, 4)$ mají n sloupců. Nechť T je čtvercová matice řádu n definovaná takto:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[1]Tato práce patří do projektu: Informační společnost 1 ET 400300415.

Nutná a postačující podmínka, aby úloha (1), (2) byla samoadjungovaná je

$$B_1TB_2^T - B_2TB_1^T = B_3TB_4^T - B_4TB_3^T$$

a hodnost $(W_1, W_2) = 2n$. Předpokládejme, že $p_i(t) \geq 0$ s. v. v $\langle a, b\rangle$ pro $i = 0, \ldots, n$. Potom nutná a postačující podmínka, aby úloha (1),(2) byla pozitivně semidefinitní je, že matice $B_1TB_2^T - B_3TB_4^T$ je negativně semidefinitní. Tuto úlohu převedeme na úlohu se separovanými okrajovými podmínkami. Zaveďme vektor $z(t)$ takto:

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(a+b-t) \end{pmatrix} \forall t \in \langle a, b\rangle$$

Tato vektorová funkce splňuje již separované okrajové podmínky.

$$(W_1, W_2)z(a) = w \tag{3}$$

$$(I, -I)z\left(\frac{a+b}{2}\right) = o. \tag{4}$$

Označme nyní pravou přesunutou podmínku podmínky (3) takto:

$$\hat{D}(t)z(t) = \hat{d}(t),\ \forall t \in \left\langle a, \frac{a+b}{2}\right\rangle. \tag{5}$$

Matici $\hat{D}(t)$ rozdělme na bloky: $\hat{D}(t) = \left(\hat{D}_1(t), \hat{D}_2(t), \hat{D}_3(t), \hat{D}_4(t)\right)$, kde $\hat{D}_i(t)$ jsou typu $(2n \times n)$. Lze ukázat, že pro všechna t platí:

1. matice $\hat{D}_1(t)T\hat{D}_2^T(t) - \hat{D}_3(t)T\hat{D}_4^T(t)$ je negativně semidefinitní
2. hodnost $\hat{D}(t) = 2n$

Z vlastností 1, 2 plyne, že matice $[\hat{D}_1(t) - \hat{D}_2(t)T, \hat{D}_3(t) + \hat{D}_4(t)T]$ je regulární pro všechna $t \in \left\langle a, \frac{a+b}{2}\right\rangle$. Vynásobíme-li přesunutou podmínku $\hat{D}(t)z(t) = \hat{d}(t)$ maticí

$$[\hat{D}_1(t) - \hat{D}_2^T(t)T, \hat{D}_3(t) + \hat{D}_4^T(t)T]^{-1} = K(t)$$

zleva, dostaneme přesunutou podmínku v normalizovaném tvaru. Lze ukázat, že matice $K(t) \cdot [\hat{D}_1(t)\hat{D}_3(t)] = \hat{G}(t)$ je symetrická a že její vlastní čísla leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dále platí:

$$K(t) \cdot [\hat{D}_2(t)\hat{D}_4(t)] = (I - \hat{G}(t)) \begin{pmatrix} -T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Potom realizace přesunu podmínek probíhá tak, že hledáme symetrickou matici $\hat{G}(t)$, která je řešením jisté Riccatiho rovnice a jejíž vlastní čísla leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Pravou stranu vynásobené rovnice (5) označme $\hat{g}(t) = K(t) \cdot \hat{d}(t)$. Tuto funkci získáme řešením jisté lineární rovnice.