Tvarová optimalizace pro 3D kontaktní problém s Coulombovým třením

Petr Beremlijski*, Jaroslav Haslinger, Michal Kočvara, Radek Kučera a Jiří V. Outrata

*Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB - Technická univerzita Ostrava

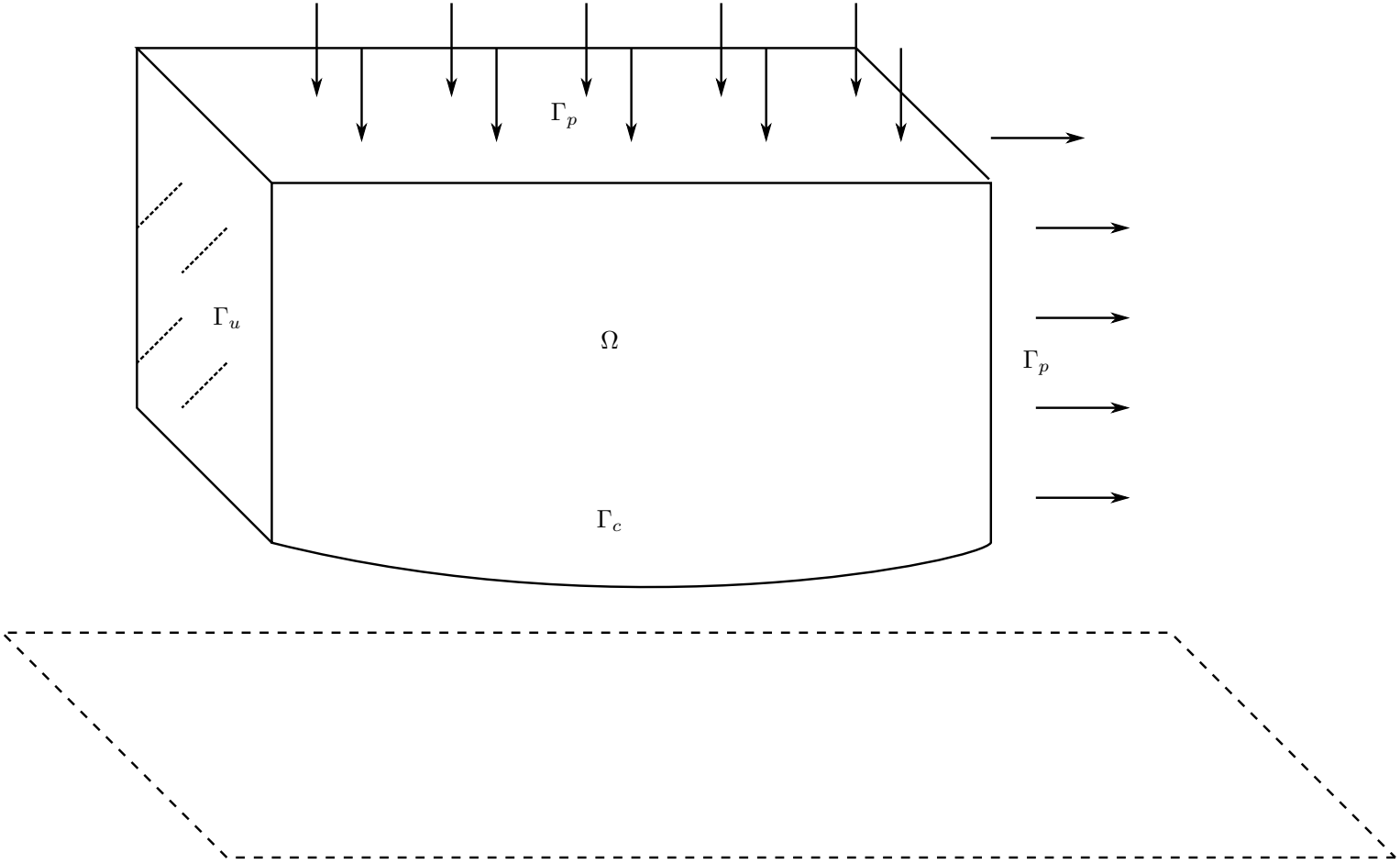
SNA'08 Liberec
28. ledna 2008

Obsah

1. Stavová úloha
2. Tvarová optimalizace
3. Citlivostní analýza
4. Numerické příklady

Stavová úloha

Kontaktní úloha s Coulombovým třením



Stavová úloha

Kontaktní problém s Coulombovým třením je popsán následujícími vztahy:

$$\frac{\partial \tau_{ij}(u)}{\partial x_j} = 0 \text{ v } \Omega, \quad i = 1, 2$$

$$\tau_{ij}\nu_j = F_i \text{ na } \Gamma_p, \quad i = 1, 2$$

$$u_i = 0 \text{ na } \Gamma_u, \quad i = 1, 2$$

$$(u_\nu + \alpha)\, T_\nu(u) = 0 \text{ na } \Gamma_c, \text{ kde } u_\nu \equiv u \cdot \nu \leq -\alpha, \; T_\nu(u) \equiv \tau_{ij}(u)\nu_i\nu_j \leq 0$$

$$|T_t(u)| \leq -\mathcal{F}T_\nu(u), \text{ kde } T_t \equiv \tau_{ij}(u)\nu_j t_i \text{ na } \Gamma_c$$

$$|T_t(u)| < -\mathcal{F}T_\nu(u)(x) \Rightarrow u_t(x) \equiv (ut)(x) = 0 \text{ na } \Gamma_c$$

$$|T_t(u)| = -\mathcal{F}T_\nu(u)(x) \Rightarrow \exists \lambda(x) > 0 : u_t(x) = \lambda(x)\mathcal{F}T_\nu(u)(x) \text{ na } \Gamma_c$$

Stavová úloha

Algebraická formulace kontaktního problému se zadaným třením:

Najděme $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_\nu, \boldsymbol{\lambda}_{t1}, \boldsymbol{\lambda}_{t2}) \in \mathbb{R}^n \times \boldsymbol{\Lambda}_\nu \times \boldsymbol{\Lambda}_t$

takové, že

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{l} - \mathbf{B}_\nu^T \boldsymbol{\lambda}_\nu - \mathbf{B}_{t1}^T \boldsymbol{\lambda}_{t1} - \mathbf{B}_{t2}^T \boldsymbol{\lambda}_{t2}$$

$$(\boldsymbol{\lambda}_\nu - \boldsymbol{\mu}_\nu, \mathbf{B}_\nu \mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} + (\boldsymbol{\lambda}_{t1} - \boldsymbol{\mu}_{t1}, \mathbf{B}_{t1}\mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} + (\boldsymbol{\lambda}_{t2} - \boldsymbol{\mu}_{t2}, \mathbf{B}_{t2}\mathbf{u})_{\mathbf{R}^p} \geq$$

$$\geq (\boldsymbol{\lambda}_\nu - \boldsymbol{\mu}_\nu, \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha})_{\mathbf{R}^p} \quad \forall (\boldsymbol{\mu}_\nu, \boldsymbol{\mu}_{t1}, \boldsymbol{\mu}_{t2}) \in \boldsymbol{\Lambda}_\nu \times \boldsymbol{\Lambda}_t$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\nu = \{\mu_\nu \in \mathbb{R}^p \mid \mu_\nu \geq 0\}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_t = \{(\mu_{t1}^T, \mu_{t2}^T)^T \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \mid (\mu_{t1})_i^2 + (\mu_{t2})_i^2 \leq g_i,\ i = 1, ..., p\}$$

Stavová úloha

Zavedeme zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^p_+ \to \mathbb{R}^p_+$:

$$\Phi(g) = \mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}_\nu(g) \;\; \forall g \in \mathbb{R}^p_+$$

Řešení diskrétního kontaktního problému s Coulombovým třením definujme jako pevný bod zobrazení Φ

Tvarová optimalizace pro kontaktní úlohu s Coulombovým třením

$$\min \Theta(\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}))$$

s omezením

$$\boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}$$

$$U_{ad} = \Bigg\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2} \;\mid\; 0 \le \boldsymbol{\alpha}^{(i,j)} \le C_0,\; i = 0, 1, \ldots, d_1,\; j = 0, 1, \ldots, d_2;$$

$$|\boldsymbol{\alpha}^{(i+1,j)} - \boldsymbol{\alpha}^{(i,j)}| \le \frac{C_1}{d_1},\; i = 0, 1, \ldots, d_1 - 1,\; j = 0, 1, \ldots, d_2;$$

$$|\boldsymbol{\alpha}^{(i,j+1)} - \boldsymbol{\alpha}^{(i,j)}| \le \frac{C_1}{d_2},\; i = 0, 1, \ldots, d_1,\; j = 0, 1, \ldots, d_2 - 1;$$

$$\sum_{i=0}^{d_1} \sum_{j=0}^{d_2} \boldsymbol{\alpha}^{(i,j)} = C_2 (d_1 + 1)(d_2 + 1) \Bigg\}$$

Tvarová optimalizace

Pro numerické řešení úlohy použijeme bundle trust metodu, ta potřebuje v každém bodě $\boldsymbol{\alpha}$ jeden libovolný Clarkeův subgradient:

$$\xi \in \partial\Theta(\boldsymbol{\alpha}) = \partial\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}))$$

Citlivostní analýza

$\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ (řešení kontaktního problému s Coulombovým třením) je dáno jako řešení zobecněné rovnosti:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0} &\in \mathbf{A}_{tt}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{t\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_t(\boldsymbol{\alpha}) + \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\lambda}_\nu) \\
\mathbf{0} &= \mathbf{A}_{\nu t}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_t + \mathbf{A}_{\nu\nu}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{u}_\nu - \mathbf{l}_\nu(\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\lambda}_\nu \\
\mathbf{0} &\in \mathbf{u}_\nu + \boldsymbol{\alpha} + N_{\mathbf{R}^p_+}(\boldsymbol{\lambda}_\nu),
\end{aligned}
\qquad (GE)
$$

kde

$$
\tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \boldsymbol{\lambda}_\nu) = \partial_{(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2})} j(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \boldsymbol{\lambda}_\nu), \quad j(\mathbf{u}_{t1}, \mathbf{u}_{t2}, \boldsymbol{\lambda}_\nu) = \mathcal{F} \sum_{i=1}^{p} \lambda^i ||(\mathbf{u}^i_{t1}, \mathbf{u}^i_{t2})||
$$

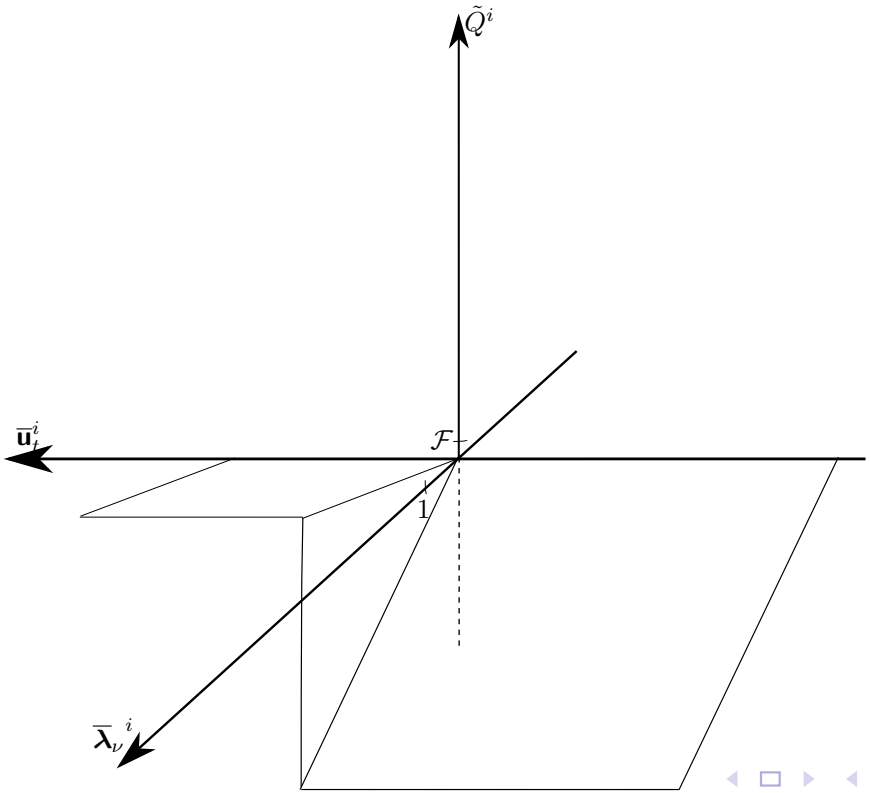
a $N_{\mathbf{R}^p_+}$ je standardní normálový kužel

Citlivostní analýza

2D případ

Multifunkce $\tilde{\mathbf{Q}}$ pro pevné $i \in \{1, 2, \cdots, p\}$ je dána následujícím předpisem:

$$\mathcal{F}\boldsymbol{\lambda}_\nu^i \partial|\mathbf{u}_t^i| = \begin{cases} \mathcal{F}\lambda_\nu{}^i & \text{jestliže } \mathbf{u}_t^i > 0 \\ -\mathcal{F}\lambda_\nu{}^i & \text{jestliže } \mathbf{u}_t^i < 0 \\ [-\mathcal{F}\lambda_\nu{}^i, \mathcal{F}\lambda_\nu{}^i] & \text{jestliže } \mathbf{u}_t^i = 0 \end{cases}$$



Citlivostní analýza

Nalezení jednoho (libovolného) Clarkeova subgradientu:

$$\partial\Theta(\boldsymbol{\alpha}) = \nabla_1\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})) + \operatorname{conv}\{\mathbf{C}^T\nabla_2\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha}))|\mathbf{C}\in\partial\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})\}$$

Protože $\forall\mathbf{y}^*:\ \emptyset\neq D^*\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})(\mathbf{y}^*)\subset\operatorname{conv}\{\mathbf{C}^T\mathbf{y}^*|\mathbf{C}\in\partial\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})\}$, stačí nalézt jeden prvek z množiny $D^*\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})(\nabla_2\mathcal{J}(\boldsymbol{\alpha},\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})))$

Prvky limitní koderivace $D^*\mathcal{S}(\boldsymbol{\alpha})$ najdeme použitím nehladkého kalkulu B. Morduchoviče

Numerické příklady

Příklad 1

$$\min \|\overline{\boldsymbol{\lambda}}_1 - \boldsymbol{\lambda}_\nu\|_2^2$$
$$\text{s omezením} \quad \boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}$$

Příklad 2

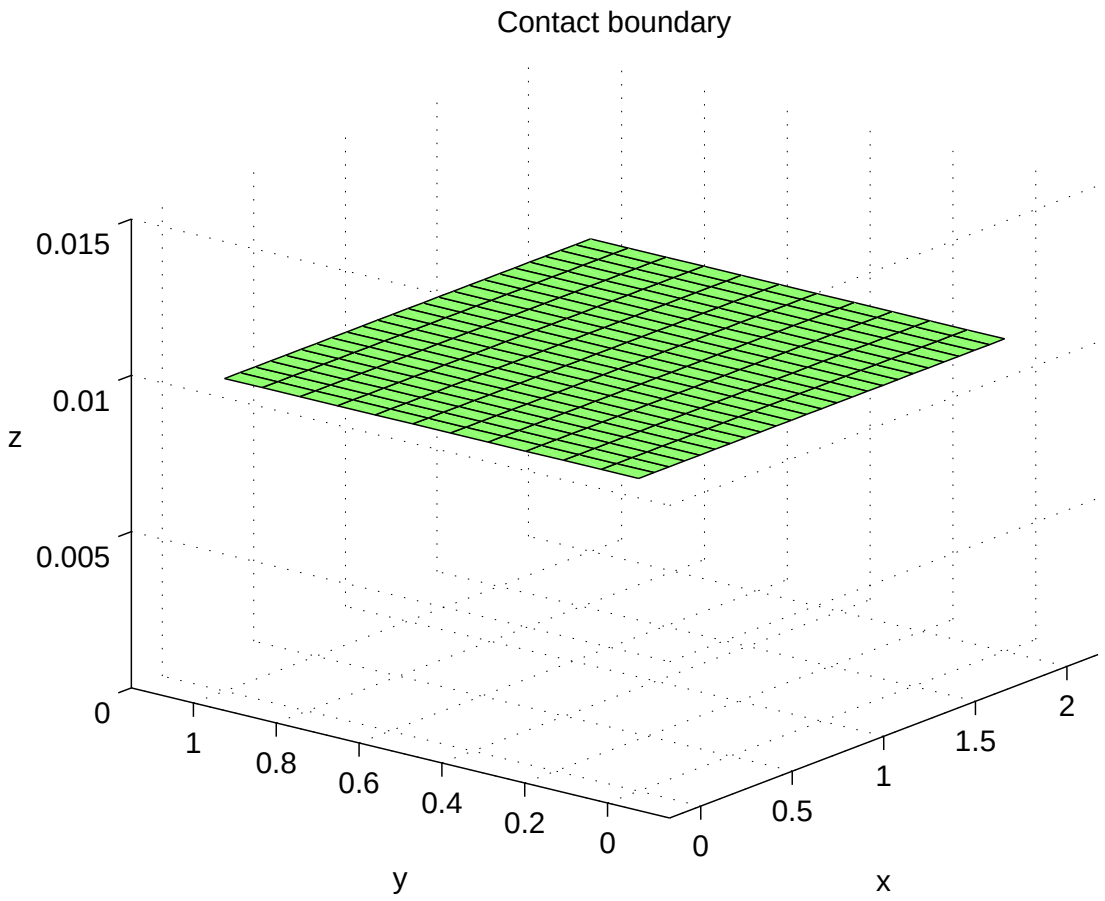
$$\min \|\overline{\boldsymbol{\lambda}}_2 - \boldsymbol{\lambda}_\nu\|_2^2$$
$$\text{s omezením} \quad \boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}$$

Příklad 3

$$\min \|\boldsymbol{\lambda}_\nu\|_4^4$$
$$\text{s omezením} \quad \boldsymbol{\alpha} \in U_{ad}$$

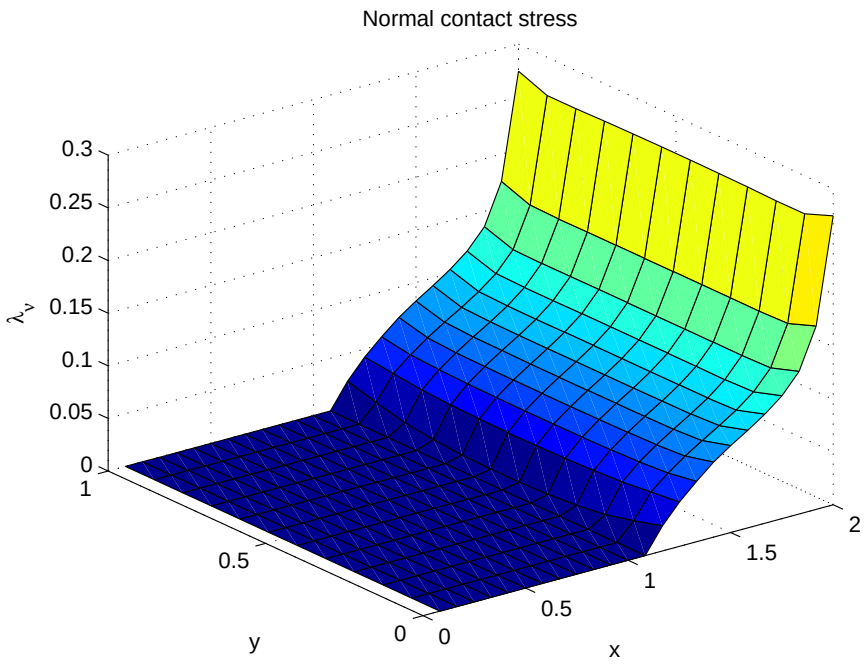
Příklad 1

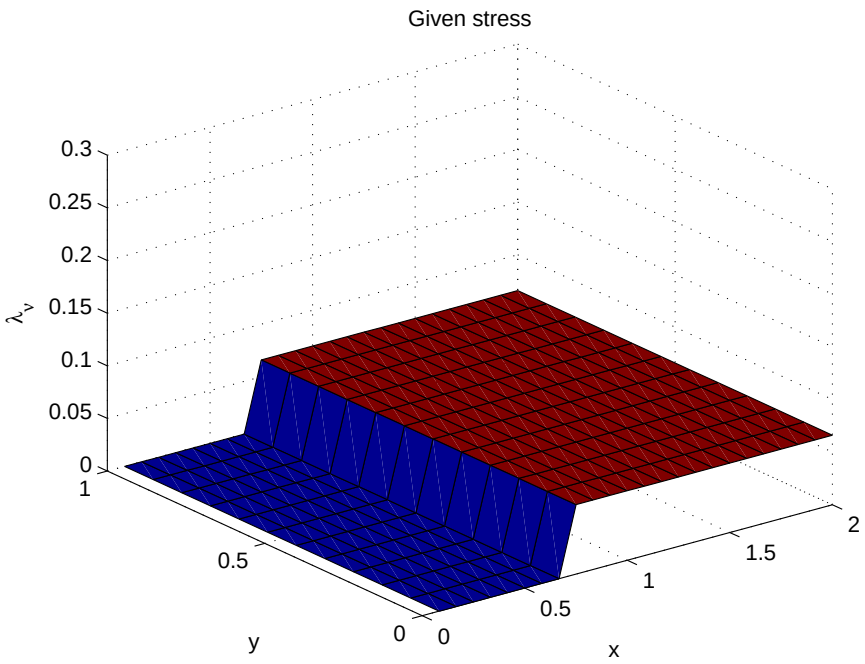
Počáteční tvar pružného tělesa



Příklad 1

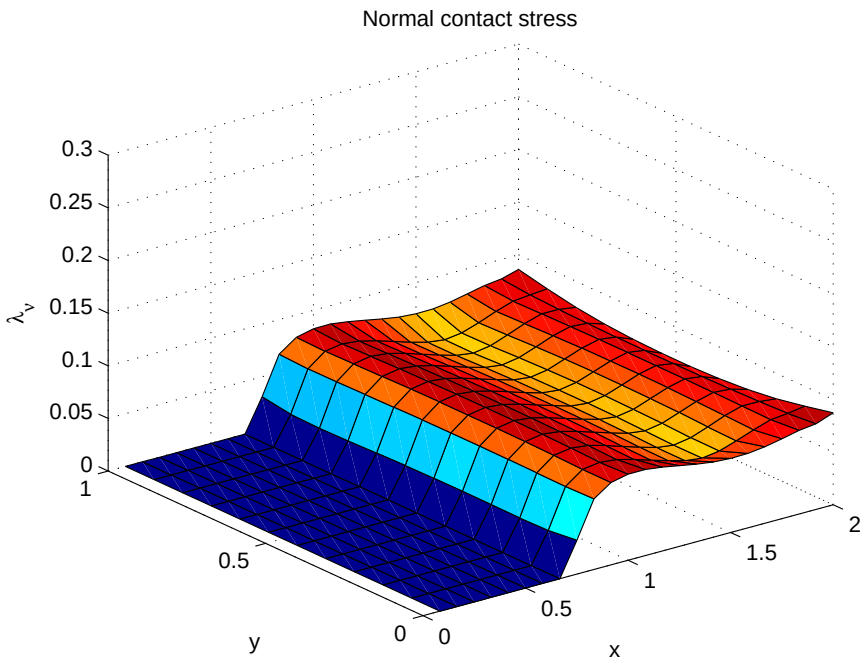
Rozložení normálového a předepsaného napětí na kontaktní hranici pro počáteční návrh tělesa

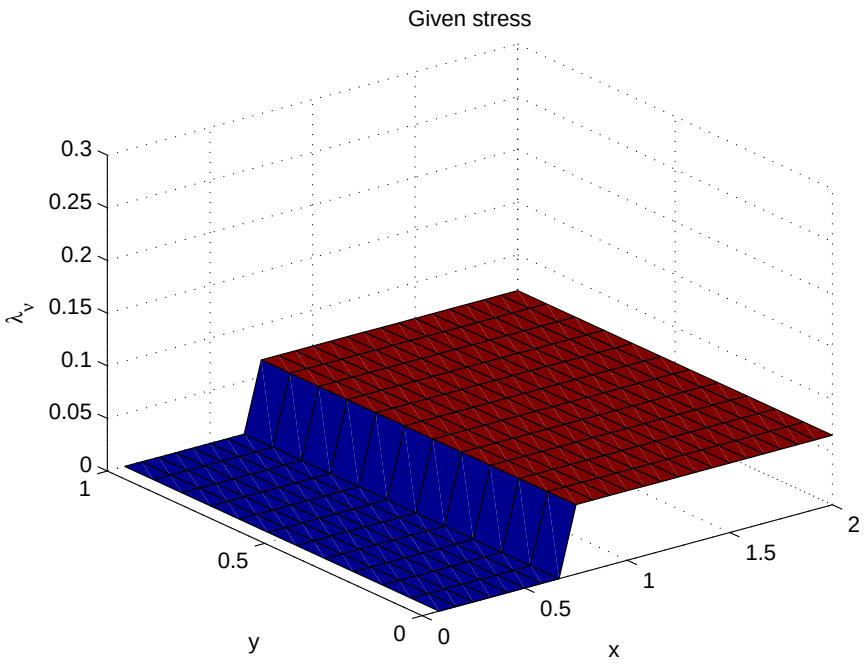




Příklad 1

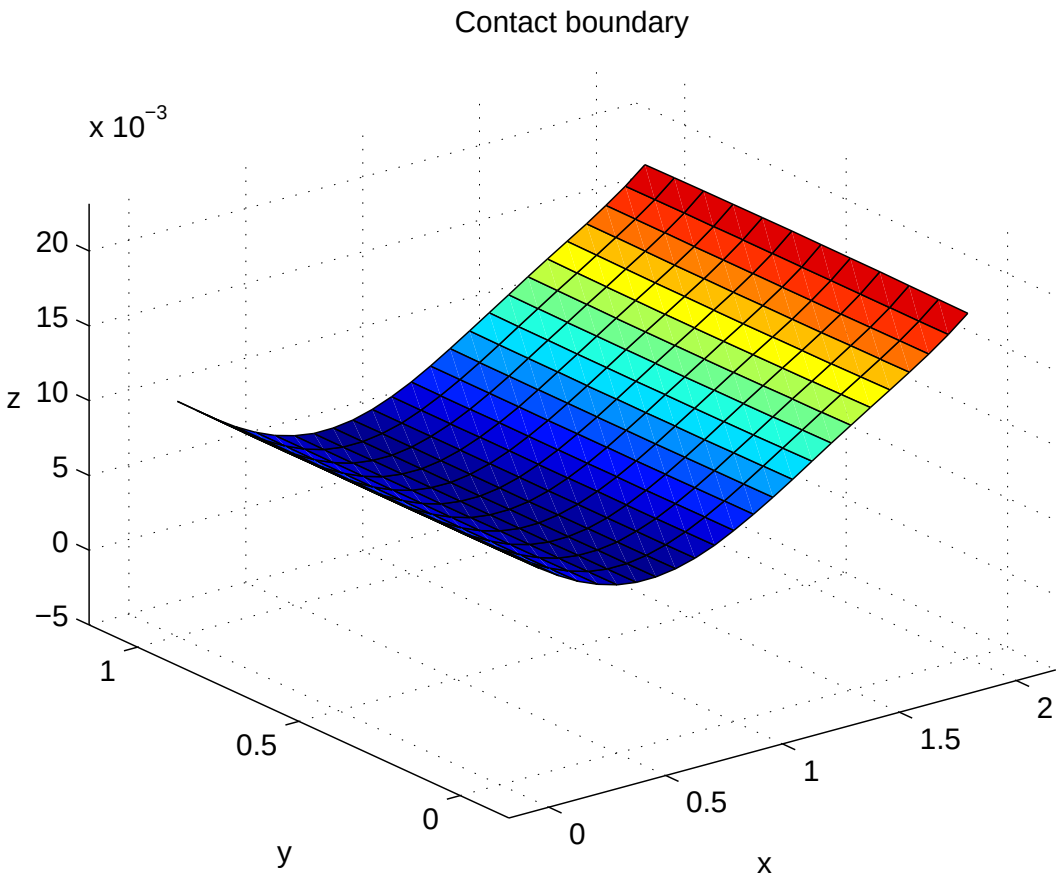
Rozložení normálového a předepsaného napětí na kontaktní hranici pro optimalizovaný návrh tělesa





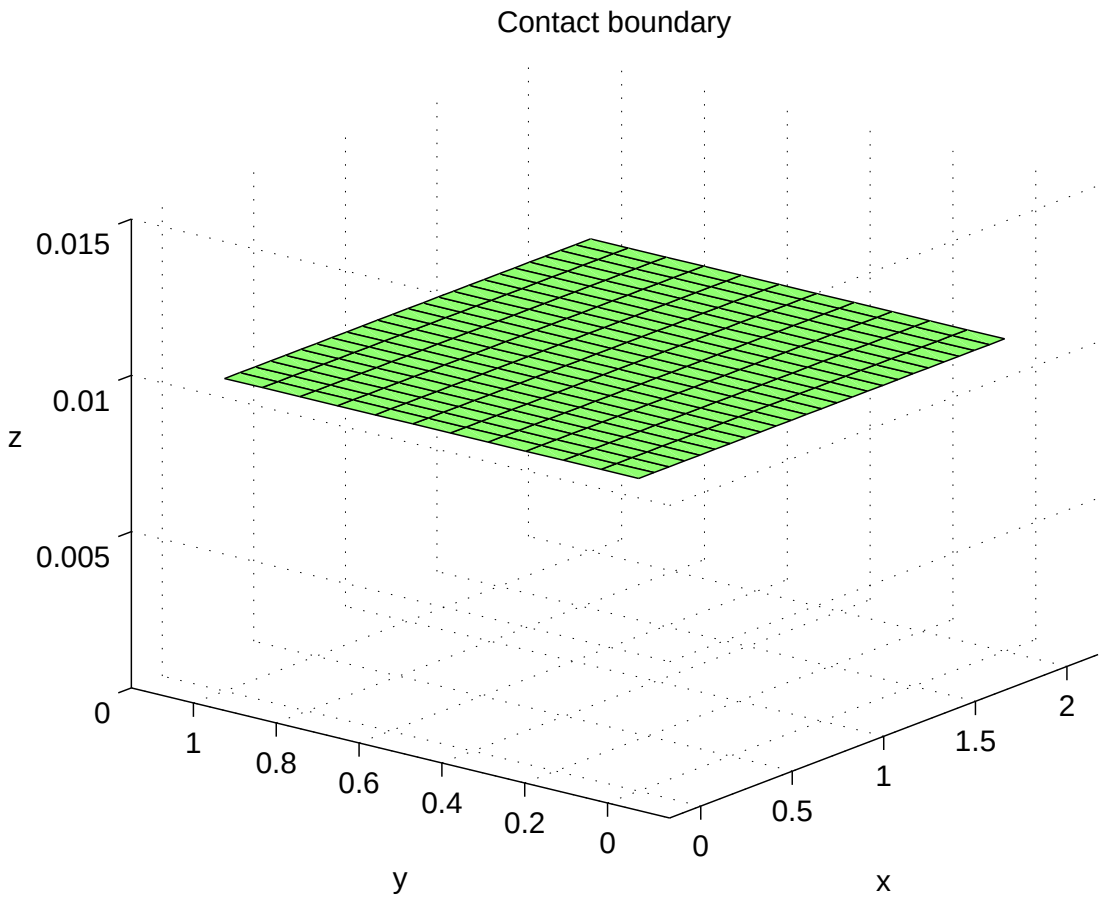
Příklad 1

Optimalizovaný tvar pružného tělesa



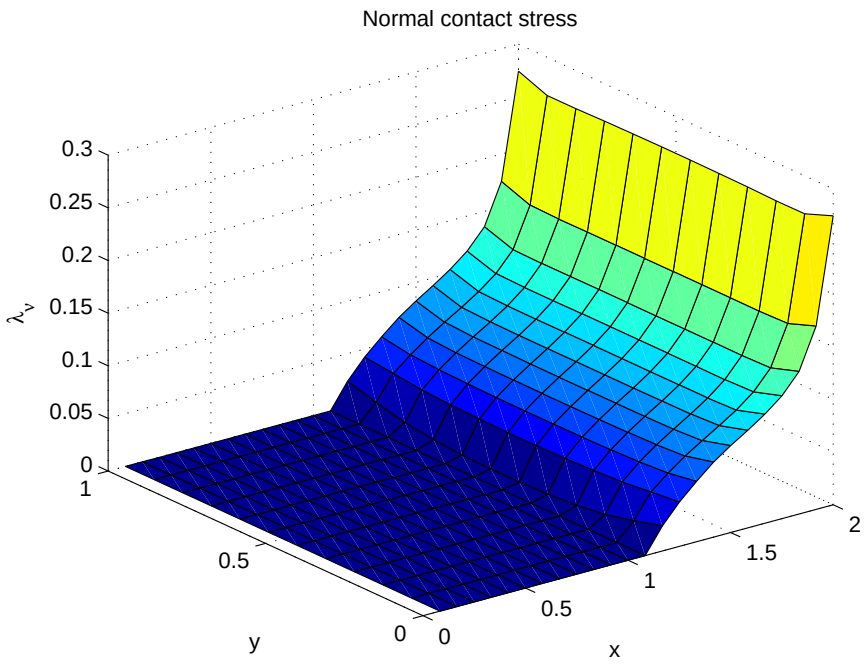
Příklad 2

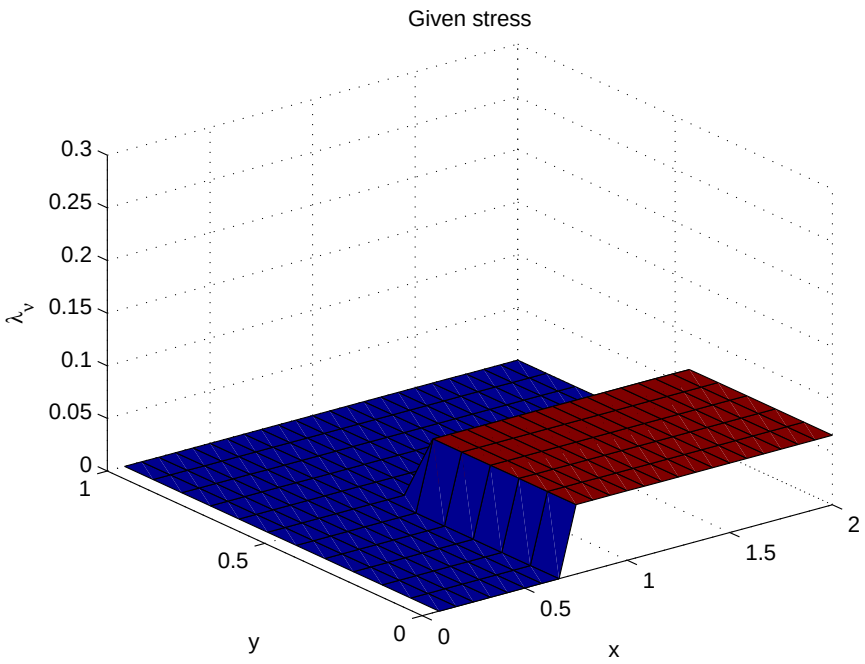
Počáteční tvar pružného tělesa



Příklad 2

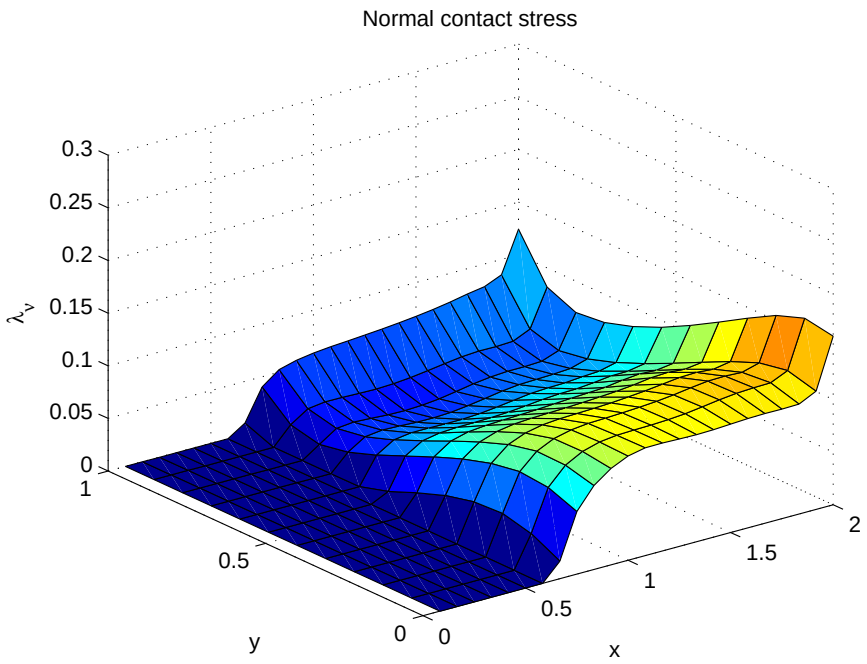
Rozložení normálového a předepsaného napětí na kontaktní hranici pro počáteční návrh tělesa

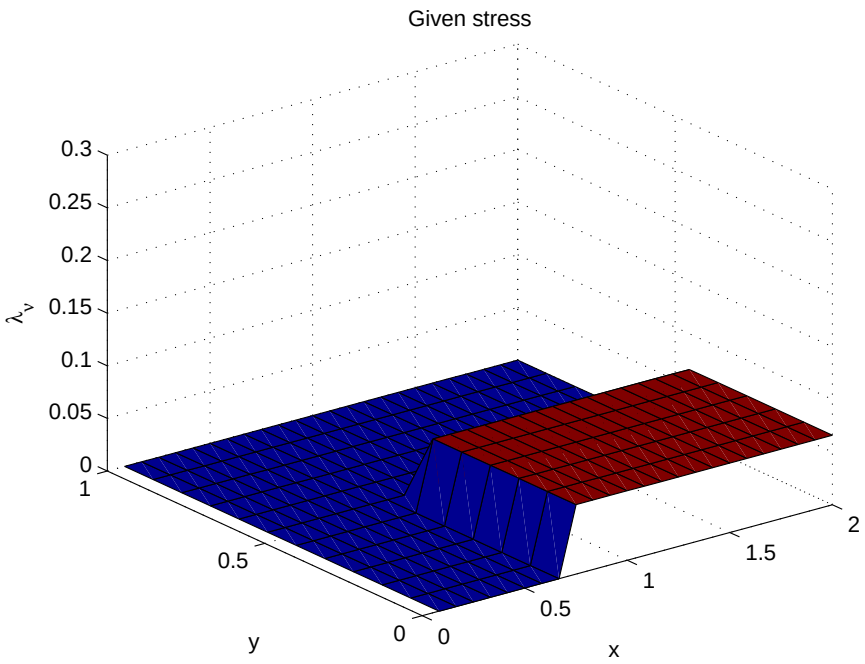




Příklad 2

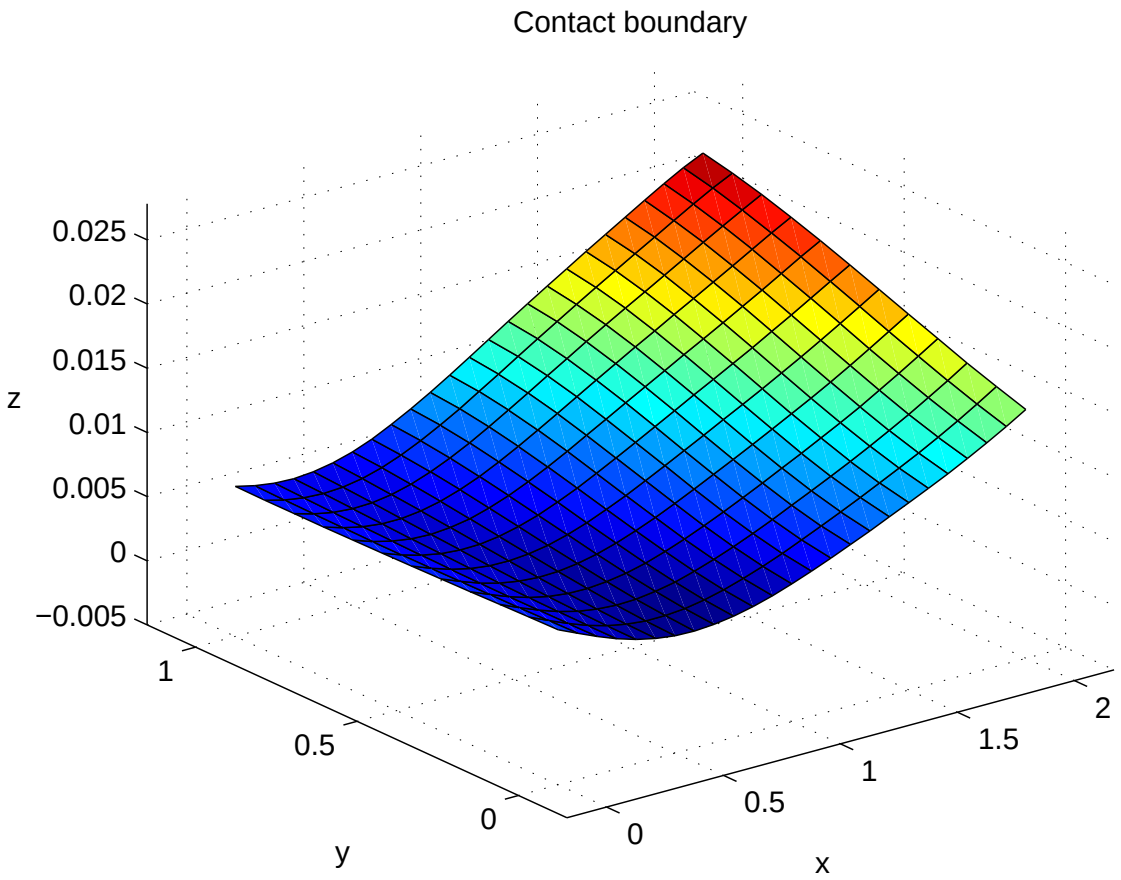
Rozložení normálového a předepsaného napětí na kontaktní hranici pro optimalizovaný návrh tělesa





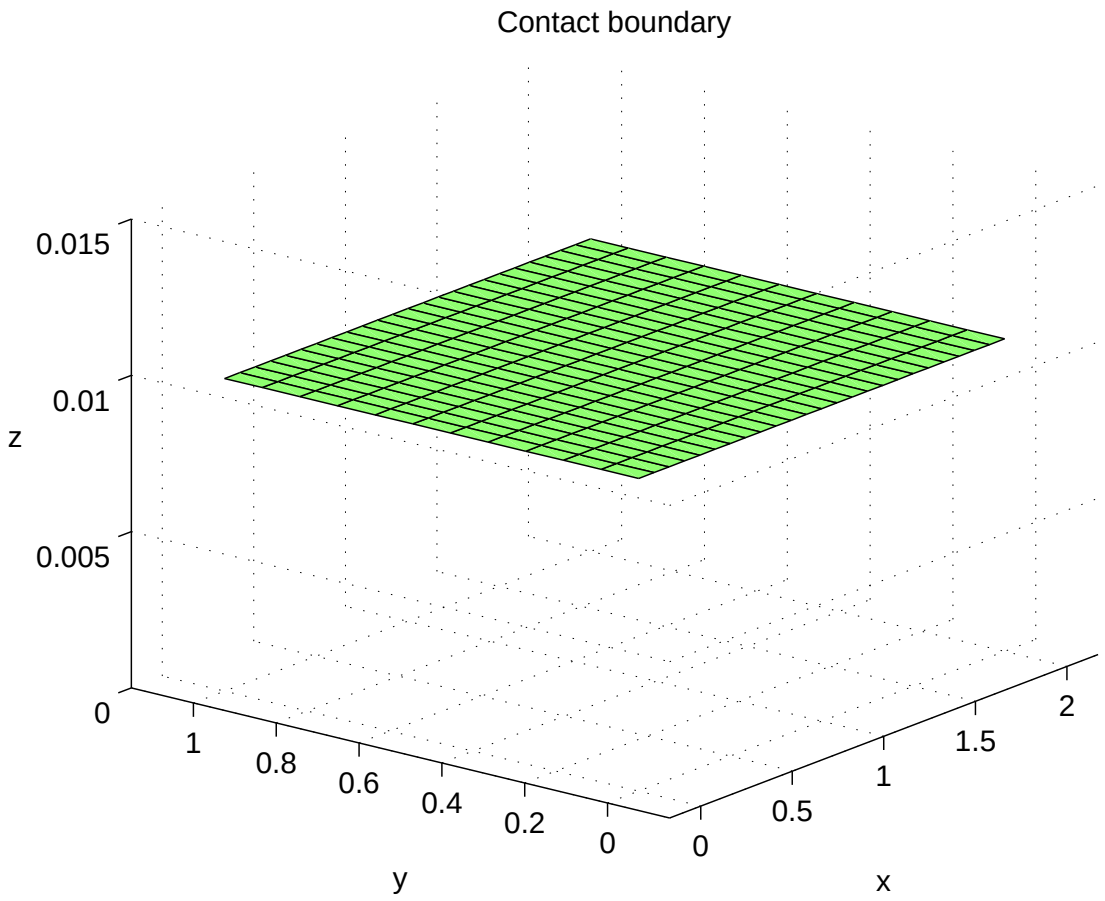
Příklad 2

Optimalizovaný tvar pružného tělesa



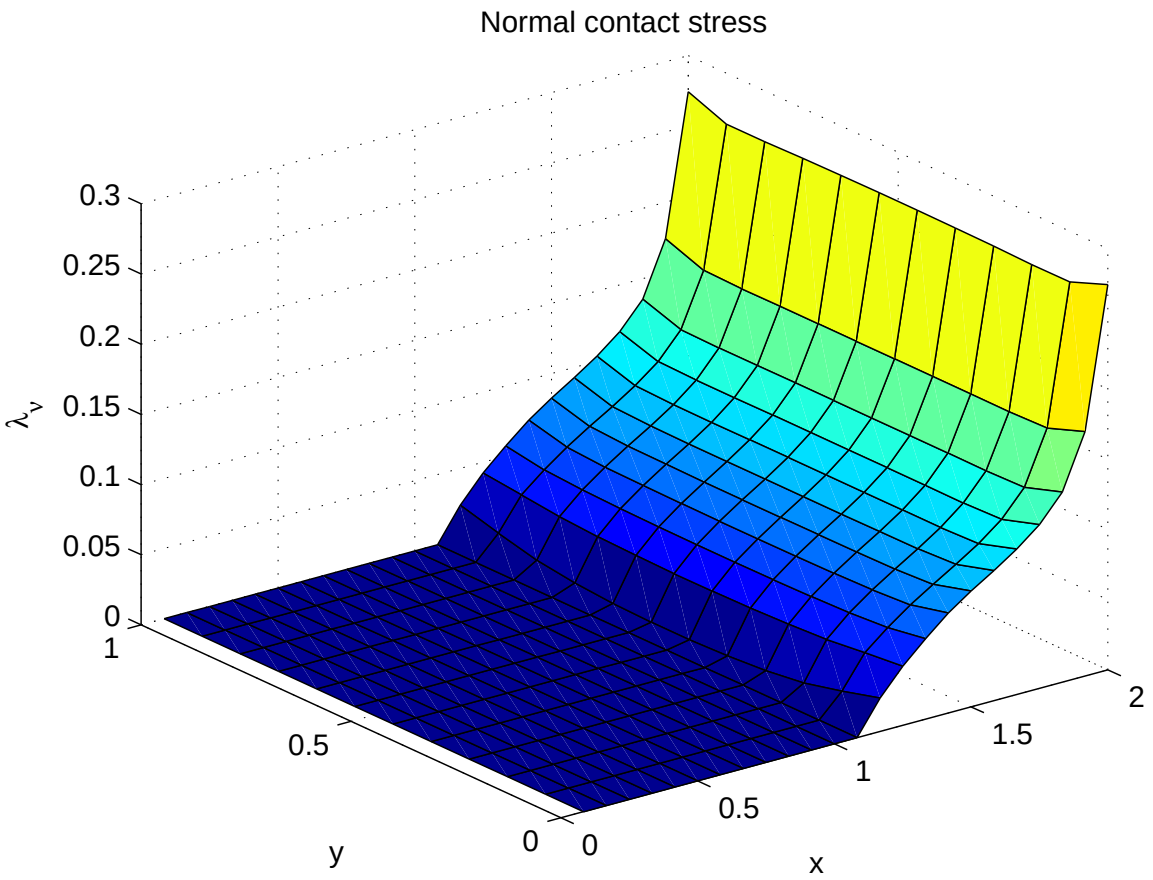
Příklad 3

Počáteční tvar pružného tělesa



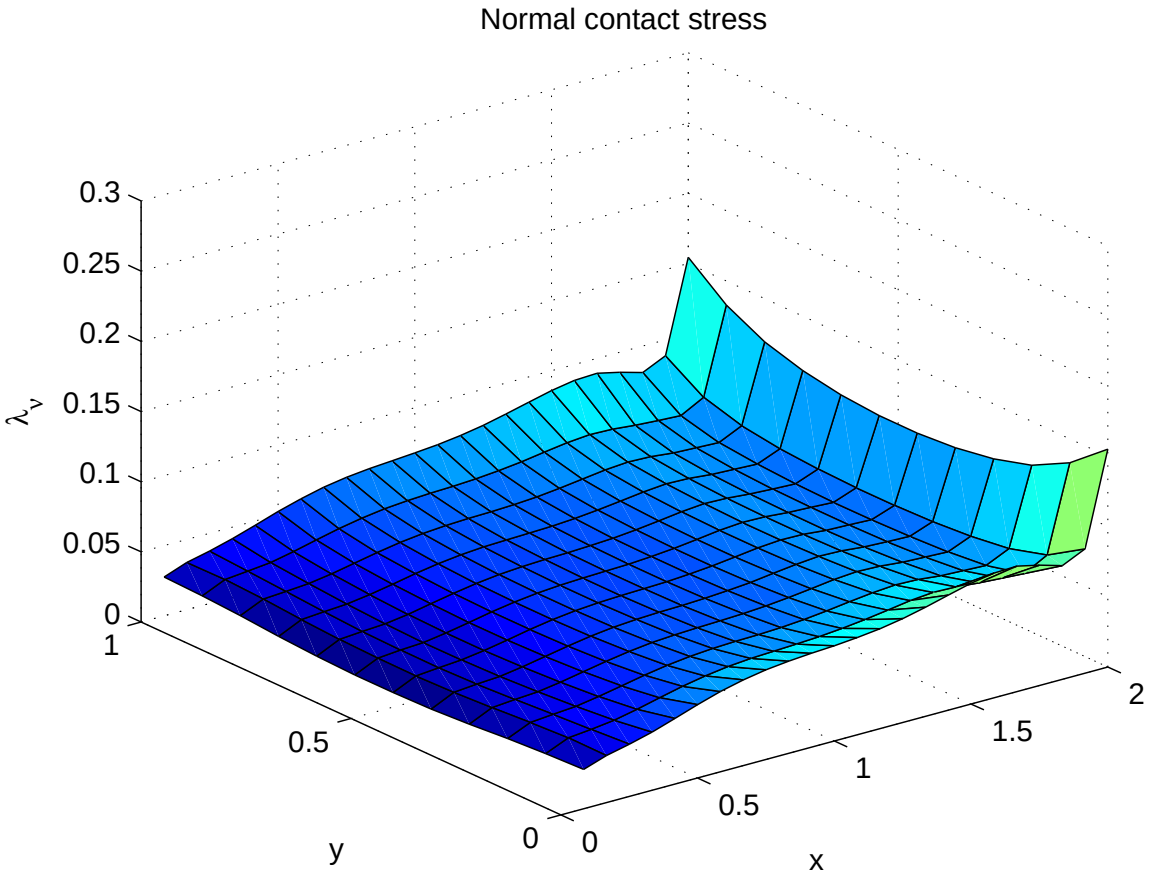
Příklad 3

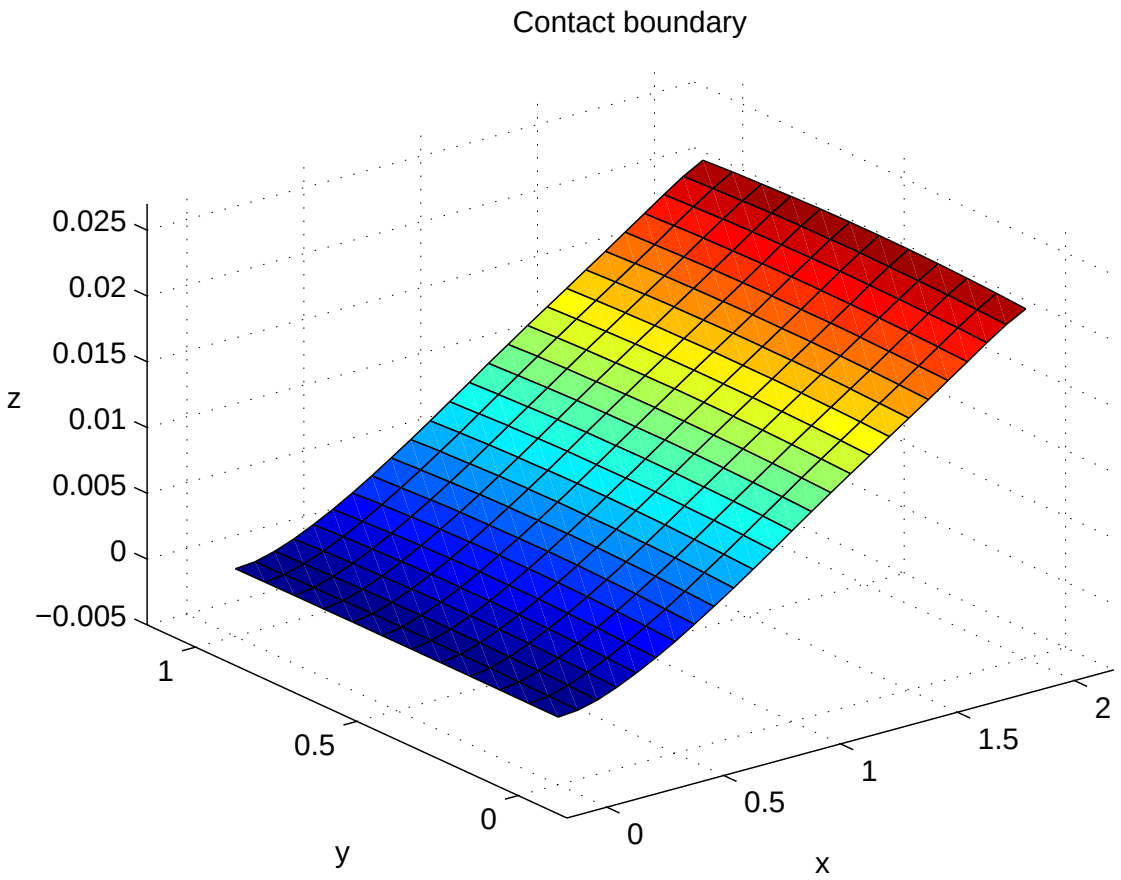
Rozložení normálového napětí na kontaktní hranici pro počáteční návrh tělesa



Příklad 3

Rozložení normálového napětí na kontaktní hranici pro optimalizovaný návrh tělesa



Příklad 3

Optimalizovaný tvar pružného tělesa