Numerické řešení problému průhybu desky:
Některé principy matematického modelování a jejich počítačových realizací.

Ivo Marek
Stavební fakulta ČVUT v Praze

29. Konference o matematice na VŠTEZ
Matematika v inženýrském vzdělání
Mutěnice, 4. - 8. září 2006

Acknowledgement

Petr Mayer and Milan Pultar

The work on which this talk is based was supported by the Program Information Society under Project 1ET400300415, Grant No. 201/02/0595 of the Grant Agency of the Czech Republic and Grant No. MSM 210000010 of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic.

Outline of the talk

- Motivation
- Some formulations of the problem
- Analytic properties of a mixed formulation
- Reproducing kernels and the biharmonic operator
- Positivity issues in the plate bending problems
- Some properties of the systems of linear algebraic equations obtained via discretization

1 Slabé řešení okrajových úloh

Pro naš účel postačí demonstrovat vše potřebné na příkladě jednorozměrné Poissonovy úlohy.

1.1 Poissonův 1-d problém

Je-li $\Omega = [0,1]$ *a* f *daná funkce, potom problém najít funkci* u *takovou, aby splňovala rovnici*

$$-\left(\frac{d}{dx}\right)^2 u(s) = f(s)\ \forall s \in (0,1) \tag{1.1}$$

jakož i okrajové podmínky

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{1.2}$$

se nazývá jednorozměrnou Poissonovou úlohou.

Je patrné, že řešitelnost Poissonovy úlohy závisí na vlastnostech funkce f. Snahou odborníků minulosti bylo řešit rovnice obecnější než tu typu (1.1) a samozřejmě, s pokud možno nejobecnějšípravou stranou f. Dnes už patří k všeobecnému vzdělání matematika umět řešit rovnice i pro situace, kdy f není funkce, na př. distribuce.

Výsledkem uvedených snah bylo zavedení pojmu *slabého řešení*. Pomocí tohoto pojmu byly snahy korunovány úspěchem, když se podařilo dokázat existenci a často i jednoznačnost řešení poměrně složitých okrajových úloh s velmi nehladkými pravými strananmi, či obecněji, daty, speciálně pro úlohy s distributivními koeficienty.

Symbolem $L^2(0,1)$ označujeme prostor tříd funkcí integrovatelných s druhou mocninou. Do stejné třídy, označme ji $[g]$, patří funkce g_1 a g_2 právě když rozdíly $g_1(s) - g_2(s) = 0$ pro skoro všechna $s \in (0,1)$ ve smyslu Lebesgueovy míry. V následujícím budeme ztotožňovat třídy funkcí s funkcemi patřícími do dané (své) třídy. Tedy, f značí současně funkci i třídu $[f]$, $f \in [f]$. Prostor $L^2(0,1)$ je vybaven normou danou výrazem

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(s)|^2 \mathsf{d}s\right)^{1/2}, \ f \in L^2(0,1). \tag{1.3}$$

Dále definujeme zobecněnou derivaci $1.$ řádu pro funkci $\phi \in L^2(0,1)$ jakožto funkci splňující vztahy

$$\int_0^1 \phi'(s)w(s)\mathsf{d}s = -\int_0^1 \phi(s)w'(s)\mathsf{d}s \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(0,1),$$

kde $\mathcal{C}^\infty(0,1)$ označuje množinu všech funkcí mající derivace všech řádů ve všech bodech intervalu $(0,1)$.

1.2 Definice *Symbol* $W^{2,1}(0,1)$ *označuje prostor všech funkcí* $w \in L^2(0,1)$ *mající zobecněné derivace* $1.$ *řádu. Tento prostor lze opatřit normou*

$$\|w\|_{W^{2,1}(0,1)} = \left(\int_0^1 |w(s)|^2\mathsf{d}s + \int_0^1 |w'(s)|^2\mathsf{d}s\right)^{1/2}.$$

Prostor V definujeme jakožto podprostor prostoru $W^{2,1}(0,1)$ pomocí relací

$$V = \left\{f \in W^{2,1}(0,1) : f(0) = f(1) = 0\right\} = H_0^1(0,1),$$

tedy, $V \subset L^2(0,1) = \overline{V}$. Tento prostor je hustý v prostoru $L^2(0,1)$, což znamená, že každý prvek $f \in L^2(0,1)$ lze psát ve tvaru

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k,\ f_k \in V,$$

což znamená, že

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\| = 0.$$

Všímněme si toho, že po vynásobení obou stran rovnice (1.1) funkcí $v \in V$ a po integraci obdržíme integrální vztahy

$$-\int_0^1 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 u(s)v(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s)v(s)\mathrm{d}s \quad \forall v \in V. \tag{1.4}$$

Integrací per partes převedeme (1.4) na tvar

$$\int_0^1 u'(s)v'(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 f(s)v(s)\mathrm{d}s \quad \forall v \in V. \tag{1.5}$$

Předpokládejme, že úloha (1.1)-(1.2) má *klasické řešení*, které označíme symbolem $\hat{u}$. To znamená, že rovnost v (1.1) nastává po dosazení $\hat{u}$ na místo u pro všechny body $s \in (0,1)$. Zřejmě, $\hat{u} \in V$ a též platí integrální vztahy (1.4) pro všechny $v \in V$.

Avšak, co se stane, nebude-li klasické řešní úlohy (1.1)-(1.2) existovat?

Následuje základní

1.3 Definice *Řekneme, že funkce $u^* \in V$ je* slabým řešením *okrajové úlohy (1.1)-(1.2), jestliže po dosazení u^* do vztahů (1.5) obdržíme platné identity pro všechny funkce $v \in V$.*

Není nijak obtížné ukázat, že existují-li dvě funkce u_1, u_2 obě ve V takové, že po postupném dosazení do vztahů (1.5) $u_j, j = 1,2$ na místě u, nastanou rovnosti pro všechny prvky $v \in V$, pak nutně $u_1 = u_2$. Odtud vyplývá, že existuje-li klasické řešení pro naši úlohu, pak nutně splyne s řešením slabým a to jak víme, je jednoznačně určeno.

Jako příklad slabého řešení si ukážeme následující úlohu.

1.4 Úloha *Nalézt funkci u splňující vztahy*

$$\int_0^1 u'(s)v'(s)\mathrm{d}s = v(\frac{1}{2}) \quad \forall v \in V,$$

je jednorozměrnou modelovou úlohou tělesa zatíženého v izolovaném bodě.

Je známo, že úlohu 1.4 nelze formulovat v termínech klasického řešení. Ve smyslu teorie slabých řešení nečiní existence a jednoznačnost žádných potíží.

Všimněme si toho, že vztahy (1.5) lze obecně zapsat ve tvaru

$$a(u, v) = F(v), \tag{1.6}$$

při čemž $a = a(u, v)$ je bilineární forma na kartézském součinu $V \times V$ a F lineární funkcionál na prostoru V. V našem případě,

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(s)v'(s)\mathrm{d}s \text{ a } F(v) = \int_0^1 f(s\mathrm{d}s. \tag{1.7}$$

Fundamentálním výsledkem teorie slabých řešení je slavné Laxovo-Milgramovo lemma.

1.5 Laxovo-Milgramovo lemma *Za předpokladu, že $a = a(u,v)$ je bilineární forma spojitá vzhledem k oběma proměnným $u, v \in V$, splňuje relace*

$$\|a(v,v)\| \geq \alpha \|v\|^2, \ \forall v \in V, \tag{1.8}$$

kde $\alpha > 0$ je konstanta nezávislá na u a v a F je spojitý na V lineární funkcionál, existuje právě jedno slabé řešení řešení úlohy (1.7).

Připomeňme si ještě, že Poissonovu úlohu (1.1)-(1.2) lze díky symetrii operátoru ji určující formulovat jakožto úlohu optimalizační, tedy,

$$J(u) = \min\{J(v) : v \in V\}, \tag{1.9}$$

kde

$$J(v) = \int_0^1 |v'(s)|^2 \mathrm{d}s - \int_0^1 f(s)v'(s)\mathrm{d}s, v \in V.$$

Diskretizace.

Buď $V_h \subset V = \tilde{W}_2^1(0,1)$, kde

$$\text{dim} V_h = N < +\infty.$$

Nechť

$$\{\phi_1, ..., \phi_N\}$$

tvoří basi prostoru V_h, tedy

$$V_h = \text{Span}\{\phi_1, ..., \phi_N\}.$$

Tudíž,

$$u_h = \sum_{k=1}^{N} \nu_k \phi_k, \tag{1.10}$$

pro každý prvek $u_h \in V_h$.

Diskretizací úlohy (U) se rozumí úloha

$(\mathbf{U_h})$ Nalézt $u_h^\star \in V_h$ takové, že platí

(1.11) $$B(u_h^\star, v_h) = (f, v_h), \ \forall v_h \in V_h.$$

1.6 *Splňuje-li forma $B = B(u,v)$ požadavky Laxova - Milgramova lemmatu, pak lze nalézt $h_0 > 0$ tak, že pro každé $0 < h \leq h_0$, existuje právě jedno řešení $u_h^\star$ úlohy (U_h).*

Navíc platí odhad

$$\|u^\star - u_h^\star\|_V \leq \kappa d_h(u_h^\star)\|f\|,$$

kde κ nezávisí ani na h ani na f a

$$d_h(v) = \text{inf}\left\{\|v - v_h\|_V : \ v_h \in V_h\right\}.$$

1.7 *Pro případ, kdy v problému (U_h)*

$$h = \frac{1}{N}, \text{ a } x_k = kh, \ k = 0, 1, ..., N,$$

a basi aproximačního podprostoru tvoří po částech lineární funkce definované formulemi

$$\phi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad 0 \leq x \leq x_{k-1}, \\ \frac{1}{h}(x - (k-1)h) & \text{pro} \quad x_{k-1} \leq x_k, \\ 1 - \frac{1}{h}(x - x_k) & \text{pro} \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0 & \text{pro} \quad x_{k+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

lze odvodit, že

$$d_h(u) = h\|u\|_V.$$

Důsledkem je posléze odhad chyby v metodě konečných prvků *pro aproximaci úlohy (U) ve tvaru*

$$\|u^\star - u_h^\star|_{\tilde{W}_2^1(0,1)} \leq \kappa h \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Vyplývá odtud speciálně, že

$$\|u^\star - u_h^\star\|_{L^2(0,1)} \leq \hat{\kappa} h^2 \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Po dosazení vyjádření (1.10) do (1.11) obdržíme vztahy

(1.12)
$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k B(\phi_k \ , \phi_j) = (f, \ \phi_j), \ j = 1, ..., N.$$

Vyplnění podmínek Laxova - Milgramova lemmatu zaručuje, že

$$\text{det}\,(B(\phi_k, \ \phi_j)) \neq 0$$

a soustava (1.12) má tudíž právě jedno řešení $\nu^\star = (\nu_1^\star, \ ...\nu_N^\star)^T$.

Matice

$$(B(\phi_k, \ \phi_j))$$

se díky její interpretaci v mechanice kontinua nazývá *maticí tuhosti* úlohy (U_h).

Je-li forma $B = B(u, \ v)$ symetrická a jsou-li splněny podmínky Laxova - Milgramova lemmatu, pak matice tuhosti úlohy (U_h) je pozitivně definitní, t.j.

$$(B(u_h, \ u_h)) \geq \tau(u_h, \ u_h) \ \forall u_h, \ u_h \in V_h, \ \tau > 0.$$

Výpočet prvků matice tuhosti spočívá ve stanovení veličin

$$\int_{a+(p-1)h}^{a+ph} \phi'_k(x)\phi'_j(x)\mathsf{dx},\ j,k=1,...,N,\ p=1,...,N-1,$$

při čemž $\Omega = (a,\ b),\ -\infty < a < b < +\infty$.

Pro výše uvedený případ jednorozměrné oblasti s Ω a pro částech lineárních funkcí ϕ_k lze tyto integrály stanovit přesně. Obecně je nutné prvky matice tuhosti určovat přibližně pomocí vhodných kvadraturních vzorců.

2 Symboly a značení

Ω	-	oblast v $\mathcal{R}^2$
$\partial\Omega$	-	hranice oblasti Ω
$H^m(\Omega),\ 1 \le m \le 2$	-	prostor řešení
$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{\|\alpha\| \le m} \int_\Omega \|\partial^\alpha v\|^2\right)^{1/2}$	-	norma v prostoru $H^m(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	-	prostor řešení s nulovými stopami
$L^{1/2}(\partial\Omega)$	-	prostor stop

$\mathcal{M}$	-	komlementární Hilbertův podprostor k prostoru $H_0^1(\Omega)$ v $H^1(\Omega)$ tedy splňující rovnost $H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{M}$
$(.,.)_{\mathcal{M}}$	-	skalární součin na $\mathcal{M}$ indukující na $\mathcal{M}$ normu ekvivalentní s normou zděděnou z $H^1(\Omega)$

3 Biharmonická rovnice (s podmínkami vetknutí)

$$\Delta^2 u = f \quad \text{v } \Omega \quad \text{a} \quad u = 0 = \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{na } \partial\Omega$$

neboli, ve slabé formulaci

3.1 Problém

Najít $u \in H_0^2(\Omega)$ *takové, aby platily vztahy*

(3.1) $$J(u) = \min\left\{J(v) : v \in H_0^2(\Omega)\right\},$$

při čemž

(3.2) $$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 - \int_\Omega f v \quad , \quad v \in H_0^2(\Omega).$$

Místo (3.2) lze minimalizovat též funkcionál

$$\mathcal{J}(v, \psi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\psi|^2 - \int_\Omega f v \tag{3.3}$$

za předpokladu, že $v \in H_0^2$ a $\psi \in L^2(\Omega)$ a přitom, platí

$$\Delta v = \psi.$$

Odpovídající podprostory právě zavedeného variačního principu jsou charakterizovány takto:

$$\mathcal{V} = \left\{(v, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) : \forall \mu \in H_0^1(\Omega) \text{ splňující } \beta\left((v, \psi), \mu\right) = 0\right\},$$

kde

$$\beta\left((v, \psi), \mu\right) = \int_\Omega grad v \; grad \mu - \int_\Omega \psi \mu \tag{3.4}$$

Vztah mezi přirozeným variačním principem (3.2) a principem daným pomocí (3.3) lze vyjádřit takto:

3.2 Věta

Buď u řešení Problému 1. Potom též

$$\mathcal{J}(u, -\Delta u) = \min \left\{ \mathcal{J}(v, \phi) : (v, \phi) \in \mathcal{V} \right\} .$$

Tato skutečnost umožňuje faktorizaci Problému 1 na postupné řešení úloh Poissonových, tedy úloh $2.$ řádu. Můžeme totiž interpretovat funkci ϕ jakožto aproximaci či reprezentaci pro $-\Delta u$.

4 Algoritmus

Vstupní data: $\lambda^0 \in \mathcal{M}, \phi^0 \in H^1(\Omega), u^0 \in H_0^1(\Omega)$

1^0 Položme postupně $k = 0, 1, ...$

2^0 Najdi funkci $\phi^{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ takovou, aby

v klasické formulaci	ve variační formulaci
$\Delta\phi^{k+1} = f$ in Ω	$\int_\Omega grad\phi^{k+1} grad\mu d\Omega = \int_\Omega f\mu d\Omega \quad \forall\mu \in H_0^1(\Omega)$
$\phi^{k+1} = \lambda^k$ on $\partial\Omega$	$\phi^{k+1} - \lambda^k \in H_0^1(\Omega)$

3^0 Najdi funkci $u^{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ takovou, aby

v klasické formulaci

$$\Delta u^{k+1} = \phi^{k+1} \text{ in } \Omega$$

$$u^{k+1} = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

ve variační formulaci

$$\int_\Omega grad u^{k+1} grad \mu d\Omega$$
$$= \int_\Omega \phi^{k+1} \mu d\Omega \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega)$$

$$u^{k+1} \in H_0^1(\Omega)$$

4^0 Najdi funkci $\lambda^{k+1} \in \mathcal{M}$ takovou, aby

v klasické formulaci

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho \left[\Delta u^{k+1} - \phi^{k+1} \right] \text{ on } \partial\Omega$$

ve variační formulaci

$$(1/\rho) \left(\lambda^{k+1} - \lambda^k, \mu \right)_{\mathcal{M}}$$
$$= \int_\Omega grad u^{k+1} grad \mu d\Omega - \int_\Omega \phi^{k+1} \mu$$
$$\forall \mu \in H_0^1(\Omega)$$

Konvergence Algoritmu je charakterizována pomocí následujících relací.

4.1 *Věta*

Za předpokladu, že parametr ρ *se vybírá z intervalu* $(0, 2c^2\sigma^2)$*, kde*

$$\sigma = \text{inf}\left\{ \frac{\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}}{\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\|_{L^2(\Omega)}} : v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right\}$$

a konstanta $c > 0$ *splňuje nerovnosti*

$$c\|\mu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq (\mu, \mu)_{\mathcal{M}}^{1/2}, \ \forall \mu \in H^1(\Omega),$$

pro veličiny počítané pomocí Algoritmu 1 platí vztahy

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u\|_{1,\Omega} = 0,$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \|\phi^k + \Delta u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

5 Diskretní formulace

Prostor přibližných řešení:

$$V_h \subset H^1(\Omega)$$

Prostor přibližných řešení s nulovými stopami:

$$V_{0h} = \{v_h \in V_h : v_h = 0 \quad \text{na} \quad \partial\Omega\}$$

Prostor přibližných řešení s omezeními:

$$\mathcal{V}_h = \{(v_h, \psi_h) \in V_{0h} \times V_h; \forall \mu_h \in V_h, \;\; \beta((v_h, \psi_h), \mu_h) = 0\}$$

Prostor přibližných řešení s omezeními a s nulovými stopami:

$$\mathcal{W}_h = \{(v_h, \psi_h) \in V_{0h} \times V_h; \forall \mu_h \in V_{0h}, \ \ \beta((v_h, \psi_h), \mu_h) = 0\}$$

Komplementární prostor k V_{0h} v prostoru V_h, tedy

$$V_h = V_{0h} \oplus \mathcal{M}_h$$

5.1 Algoritmus 1_h

Vstupní data: $f_h \in V_h, \lambda_h^0 \in \mathcal{M}, \phi_h \in V_h, u_h \in V_{0h}$.

Položme postupně $k = 0, 1, \ldots$

1^0 *Najdi funkci* ϕ_h^k *splňující vztahy* $\phi_h^k - \lambda^k \in V_{0h}$ *a*

$$\forall v_h \in V_{0h}, \quad \int_\Omega grad\ \phi_h^k\ \ grad\ v_h = \int_\Omega f v_h.$$

2^0 *Najdi funkci* $u_h^k \in V_{0h}$ *takovou, aby*

$$\forall v_h \in V_{0h}, \quad \int_\Omega grad\ u_h^k\ grad\ v_h = \int_\Omega \phi_h^k v_h.$$

3^0 *Najdi funkci* $\lambda_h^{k+1} \in \mathcal{M}_h$ *takovou, aby*

$$\forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, \quad \left(\lambda_h^{k+1} - \lambda_h^k, \mu_h\right)_{\mathcal{M}_h} = \rho\, \beta\left((u_h^k, \phi_h^k), \mu_h\right) = 0.$$

Dále nechť zobrazení $A_h : V_h \longrightarrow V_{0h}$ je definováno pomocí vztahů

$$A_h \psi_h = v_h \Leftrightarrow \forall \mu_h \in V_{0h}, \int_\Omega grad\ v_h\ grad \mu_h = \int_\Omega \psi_h \mu_h$$

Podobně definujeme $B_h : V_h \to \mathcal{M}_h$ pomocí soustavy rovností: B_h splňuje

$$\forall \mu_h \in \mathcal{M}_h : (B_h \psi_h, \psi_h)_{\mathcal{M}_h} = \beta\left((A_h \psi_h, \psi_h), \mu_h\right) = 0.$$

Tedy, $B_h \psi_h$ je zúžení funkce $A_h \psi_h$ na $\partial\Omega$. (Jest totiž $A_h \sim \Delta^{-1}$ s okrajovými podmínkami danými prostřednictvím $A_h \psi_h$).

Výsledek podobný tvrzením o konvergenci pro kontinuální situaci je obsahem následujícího tvrzení

5.2 Věta

Za předpokladu, že parametr ρ se vybírá z intervalu $(0, 2{\sigma_h}^2)$, kde

$$\sigma_h = \frac{1}{\|B\|},$$

při čemž $\|B\|$ značí operátorovou L^2-normu, platí tyto vztahy

$$\lim_{k \to \infty} \left\|u_h^k - u_h\right\|_{V_{0h}} = 0, \quad \lim_{k \to \infty} \left\|\phi_h^k - \phi_h\right\|_{V_h} = 0.$$

6 Volba prostorů konečných prvků

Triangulace $\mathcal{T}_h$ oblasti Ω sestává z prvků K a to tak, že $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h}$ a přitom každý element K splňuje standardní ve smyslu [5] geometrické požadavky. Předpokládá se rovněž, že každý element K ve všech triangulacích pro $0 < h \leq h_0$ je afinním obrazem referenčního elementu $\hat{K} : K = F_K(\hat{K})$. Pomocí triangulace $\mathcal{T}_h$ je generován prostor

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_K \right\}$$

kde

$$P_K = \left\{ v : K \to \mathcal{R}; v = \hat{v} \circ F_K^{-1}, \forall \hat{v} \in \hat{P} \right\}$$

při čemž se předpokládá, že $\hat{P}$ je daný konečně-rozměrný prostor funkcí $\hat{v}$ splňujících

$$P_1 \subset \hat{P}$$

kde P_1 značí množinu polynomů stupně ≤ 1 dvou proměnných.

6.1 Definice

Regulární třídou triangulací rozumíme systém $\{\mathcal{T}_h\}$ *splňující s vhodnými konstantami nezávislými na* h α *a* τ *takovými, že*

$$\max \left\{ \frac{h(K)}{\delta(K)} \right\} \le \alpha, \qquad \tau \max \, \{h(K) : K \in \mathcal{T}_h\} \le \min \, \{h(K) : K \in \mathcal{T}_h\} \,,$$

$$h = \max \{h(K) : K \in \mathcal{T}_h\} \,,$$

kde $h(K) = \text{diametr } K, \delta(K) = \sup\{\text{diametr kruhů vepsaných do } K\}$.

Přechozí teorie byla odvozena bez speciálních požadavků na volbu prostorů$V_h, V_{0h}, \mathcal{M}_h$. Pro výpočet parametru ρ však bez využití některých specifik prostorů řešení se neumíme obejít. Za prostor $\mathcal{M}_h$ v souladu s volbou prostorů V_h a V_{0h} využijeme též specifické volby $\mathcal{M}_h$: Za $\mathcal{M}_h$ volme podprostor V_h funkcí jejichž hodnoty ve vnitřních uzlech oblasti Ω jsou nulové. Potom odvodíme následující výsledek.

6.2 *Předpokládejme, že skalární sučin* $(.,.)_{\mathcal{M}_h}$ *je* L^2*-součin na* $\partial\Omega$. *Dále, nechť* V_h *a* V_{0h} *a* $\mathcal{M}_h$ *jsou zvoleny výše uvedeným způsobem. Potom,*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_h = \sigma,$$

kde σ *je veličina odvozená v části pojednávající o kontinuální analýze biharmonického problému.*

7 Závěry

Fundamentální teoretické výsledky z dnes již klasických prací [6] a [5] byly upraveny na základě soudobých poznatků výpočtové matematiky a vytvořen adekvátní softwarový produkt [10]. Současně probíhají experimenty, které potvrzují očekávané kvality diskutovaných metod. Výsledky experimentů budou pečlivě vyhodnoceny a publikovány. Dá se očekávat, že tyto metody se stanou součástí softwarových soustav praktického užití, tedy nejen výzkumnou prací. Otázkou zůstává, proč uvedeného přístupu nebylo využito praktiky již v minulosti. V rámci teorie byly myšlenky navržené v [6] dále rozvíjeny, na př. v [8].

[1] Bittnar Z., Šejnoha J. *Numerické metody mechaniky 1*. Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.

[2] Bittnar Z., Šejnoha J. *Numerické metody mechaniky 2*. Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.

[3] Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, Philadelphia 2002.

[4] Ciarlet P.G., Glowinski R. *Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation*. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering **5** (1975) 277 - 295.

[5] Hlaváček I. *A mixed finite element method for plate bending with a unilateral obstacle*. Appl. Math. **39**, 25-44 (1994).

[6] Mayer P. *Výpočtové experimenty s deskou*. Výzkumná zpráva K101.05.01. Praha 2005.

barva2 barva1 orange brown pink textmagenta

[1] Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1951), 337-404.

[2] Aronszajn N., Smith K.T. *Characterization of positive reproducing kernels. Applications to Green's functions*. (1957), 611-622.

[3] Bittnar Z., Šejnoha J. *Numerical Methods of Mechanics 1*. Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.

[4] Bittnar Z., Šejnoha J. *Numerical Methods of Mechanics 2*. Vydavatelství ČVUT, Praha 1992.

[5] Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, Philadelphia 2002.

[6] Ciarlet P.G., Glowinski R. *Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation*. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering **5** (1975) 277 - 295.

[7] Duffin R.J. *On a question of Hadamard concerning superharmonic functions*. Journal of Mathematics and Physics **1** (1949), 253-258.

[8] Hlaváček I. *A mixed finite element method for plate bending with a unilateral obstacle*. Appl. Math. **39**, 25-44 (1994).

[9] Hlaváček I. *Plate bending problems with uncertain input data*. Unpublished manuscript, Srní, September 2005.

[10] Mayer P. *Computational experiments with plates*. Research papers ČVUT K101.05.01. Praha 2005.