Převedení okrajové úlohy na sled úloh počátečních [1]

Jiří Taufer

Abstrakt

Tento příspěvek je věnován řešení okrajových problémů pro soustavu okrajových obyčejných diferenciálních lineárních rovnic metodami, které jsou založeny na myšlence přesunu okrajových podmínek. V příspěvku je ukázána aplikace metody přesunu podmínek na soustavu samoadjungovanou pozitivně semidefinitní úlohu, jejíž numerická realizace vede k numericky stabilní metodě.

1 Úvod

Okrajovou úlohu pro soustavu obyčejných diferenciálních lineárních rovnic lze teoreticky řešit pomocí lineární kombinace řešení soustavy homogenní a partikulárního řešení. Numericky je tato úloha obtížně realizovatelná ze dvou důvodů. Za prvé: Soustavy diferenciálních rovnic, které jsou rozumné pro okrajovou úlohu, bývají pro úlohy počáteční velmi nestabilní. To znamená, že u takových úloh získat fundamentální systém řešení, případně partikulární řešení je numericky obtížné. Za druhé: Získání hledaných koeficientů do příslušné lineární kombinace tak, aby takto získané řešení splňovalo okrajové podmínky by vedlo k řešení soustavy rovnic velmi špatně podmíněných.

Metody, založené na myšlence přesunu tyto špatně podmíněné úlohy zahrnují, ale obsahují navíc řadu metod, které jsou z hlediska numerické realizace stabilní. Existuje návod, jak obecně takové stabilní metody získávat ([1],[2], nebo [3]).

2 Metoda přesunu podmínek pro okrajovou úlohu pro soustavu obyčejných diferenciálních lineárních rovnic

Zabývejme se řešením soustavy diferenciálních lineárních rovnic:

$$x'(t) + A(t)x(t) = f(t) \quad \text{s.v. v } (a, b), \tag{1}$$

kde $x(t)$ a $f(t)$ jsou $N \times 1$ vektory
$A(t)$ je $N \times N$ matice
$A(t), f(t) \in \mathcal{L}_{(a,b)}$.

[1] Tato práce patří do projektu: Informační společnost 1 ET 400300415.

Řešení $x(t)$ hledáme ve třídě absolutně spojitých funkcí, které splňují následující okrajové podmínky.

$$Ux(a) = u, \tag{2}$$

$$Vx(b) = v, \tag{3}$$

kde U a V jsou obecně obdélníkové matice, které mají počet sloupců roven číslu N. Budeme řešit následující úlohu:

Definice 1 *Úloha ψ: Hledáme absolutně spojitý vektor $x(t)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že*

1. $x'(t) + A(t)x(t) = f(t)$ s.v. v (a, b).

2. $Ux(a) = u$ *3.* $Vx(b) = v$.

Formulujme nyní dvě věty o přesunu podmínek:

Věta 1 *Nechť absolutně spojitá matice $D(t)$ typu $n_1 \times N$ a absolutně spojitý vektor $d(t)$, který má n_1 složek, splňují diferenciální rovnice*

$$D'(t) = D(t)A(t) + Z_1(t, D(t), d(t))D(t)$$
$$d'(t) = D(t)f(t) + Z_1(t, D(t), d(t))d(t)$$

a počáteční podmínky

$$D(a) = K_1U, \qquad d(a) = K_1u,$$

kde $Z_1(t, D, d)$ je libovolná $n_1 \times n_1$ matice taková, že $Z_1(t, D(t), d(t)) \in \mathcal{L}(a, b)$ a K_1 je regulární matice řádu n_1.
Potom

$$D(t)x(t) = d(t) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle \tag{4}$$

a pro každé řešení naší okrajové úlohy.

Tato věta nám zavádí přesun levé okrajové podmínky (2) na celý interval $\langle a, b\rangle$. Rovnici (4) říkáme přesunutá podmínka podmínky (2). O matici $D(t)$ a vektoru $d(t)$ říkáme, že realizují přesun podmínky (2). Analogicky platí věta o přesunu pravé okrajové podmínky.

Věta 2 *Nechť absolutně spojitá matice $C(t)$ typu $n_2 \times N$ a absolutně spojitý vektor $c(t)$, který má n_2 složek, splňují diferenciální rovnice*

$$C'(t) = C(t)A(t) + Z_2(t, C(t), c(t))C(t)$$
$$c'(t) = C(t)f(t) + Z_2(t, C(t), c(t))c(t)$$

a počáteční podmínky (tentokrát v bodě b)

$$C(b) = K_2V, \qquad c(b) = K_2v,$$

kde $Z_2(t, C, c)$ je libovolná $n_2 \times n_2$ matice taková,
že $Z_2(t, C(t), c(t)) \in \mathcal{L}\ (a, b)$ a K_2 je regulární matice řádu n_2.
Potom pro každé řešení úlohy ψ platí

$$C(t)x(t) = c(t) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle.$$

Zaveďme nyní tři algoritmy, kterými lze řešit úlohu ψ.

2.1 Algoritmus A

Nechť úloha ψ má řešení. Nejprve sestrojíme matici $(D(t), d(t))$ řešením počáteční úlohy zleva doprava. Zvolíme absolutně spojitou matici $R(t)$ tak, aby matice $\begin{pmatrix} D(t) \\ R(t) \end{pmatrix}$ byla regulární pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Hledáme vektor $r(t)$ řešením diferenciální rovnice

$$r'(t) = R(t)f(t) + (R'(t) - R(t)A(t)) \begin{pmatrix} D(t) \\ R(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$$

zprava doleva s počáteční podmínkou $r(b) = R(b)p$ v bodě b, kde p je nějaké řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} D(b) \\ V \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} d(b) \\ v \end{pmatrix}.$$

Nakonec řešení $x(t)$ úlohy ψ hledáme ze soustavy

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ R(t) \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} d(t) \\ r(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \langle a, b \rangle.$$

2.2 Algoritmus B

Nechť úloha ψ má řešení. Řešením počáteční úlohy zprava doleva sestrojíme matici $(C(t), c(t))$. Zvolíme absolutně spojitou matici $R(t)$ tak, aby matice $\begin{pmatrix} R(t) \\ C(t) \end{pmatrix}$ byla regulární pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Hledáme vektor $r(t)$ řešením diferenciální rovnice

$$r'(t) = R(t)f(t) + (R'(t) - R(t)A(t)) \begin{pmatrix} R(t) \\ C(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

zleva doprava s počáteční podmínkou $r(a) = R(a)p$ v bodě a, kde p je nějaké řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} U \\ C(a) \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} u \\ c(a) \end{pmatrix}.$$

Nakonec řešení $x(t)$ úlohy ψ hledáme ze soustavy

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ C(t) \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in \langle a, b \rangle.$$

2.3 Algoritmus C

Nechť úloha ψ má jediné řešení. Potom soustava

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ C(t) \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} d(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$$

má jediné řešení pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$ a toto řešení je řešením původní úlohy ψ. Algoritmus C spočívá v sestrojení matice $(D(t), d(t))$ řešením počátečního problému zleva doprava a sestrojením matice $(C(t), c(t))$ řešením počátečního problému zprava doleva.

Numerická realizace vyžaduje, aby matice $D(t)$, případně $C(t)$, které realizují přesun podmínek byly normalizované, t.j. aby jejich normy a normy jejich pseudoinverzních matic byly omezené konstantou, která nezávisí na koeficientech diferenciální rovnice, ani na délce intervalu $\langle a, b\rangle$.

3 Samoadjungovaná okrajová úloha pro diferenciální rovnici $2n$-tého řádu pro separované okrajové podmínky

Zabývejme se nyní okrajovou úlohou pro samoadjungovanou diferenciální rovnici $2n$-tého řádu:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(p_{n-i}(t)y^{(i)}(t))^{(i)} = q(t), \tag{5}$$

kde koeficienty rovnice splňují následující podmínky:

$$q(t), 1/p_0(t), p_i(t) \in \mathcal{L}_{(a,b)} \qquad \text{pro}\, i = 1, ..., n.$$

Abychom mohli snadněji formulovat okrajové podmínky, zaveďme si nejdříve pojem kvasiderivace.

Definice 2 *Říkáme, že funkce $y(t)$ má kvasiderivace až do $2n$-tého řádu, jestliže existuje $2n$ funkcí:*

$$\begin{aligned} y^{[k]}(t) &= y^{(k)}(t) \qquad \textit{pro}\, k = 1, 2, ..., n-1, \\ y^{[n]}(t) &= p_0(t)y^{(n)}(t), \\ y^{[n+j]}(t) &= p_j(t)y^{(n-j)}(t) - (y^{[n+j-1]}(t))', \quad \textit{pro}\, j = 1, ..., n. \end{aligned}$$

Dodefinujme $y^{[0]}(t) = y(t)$ a položme $x_i(t) = y^{[i-1]}(t)$ pro $i = 1, ..., 2n$. Zaveďme vektor $x(t) = (x_1(t), ..., x_{2n}(t))^T$. Uvažujme okrajové podmínky pro diferenciální rovnici (5) ve tvaru:

$$Ux(a) = u \qquad Vx(b) = v,$$

kde U a V jsou $n \times 2n$ matice a vektory u a v mají n složek. Rozdělme matice U a V na bloky:

$$U = (U_1, U_2), \qquad V = (V_1, V_2),$$

kde U_1, U_2, V_1 , a V_2 jsou čtvercové matice.
Nechť T je čtvercová matce řádu n definovaná takto:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Předpoklady zaručující, že úloha pro diferenciální rovnici (5) s příslušnými okrajovými podmínkami je samoadjungováná a positivně semidefinitní jsou tyto:

1. $\frac{1}{p_0(t)}$, $q(t), p_i(t) \in \mathcal{L}\ (a,b)$, pro $i = 1, ..., n$.
2. $p_i(t) \geq 0$ s.v. v (a,b) pro $i = 0, 1, ..., n$.
3. Matice $U_1\, T\, U_2^T$ je symetrická a negativně semidefinitní.
4. Matice $V_1\, T\, V_2^T$ je symetrická a positivně semidefinitní.
5. Hodnosti matic U a V jsou rovny n.

V dalším textu budeme předpokládat, že vlastnosti $1-5$ jsou splněny. Nejdříve převedeme standardním způsobem rovnici $2n$-tého řádu na systém $2n$ rovnic prvního řádu. Z definice kvasiderivací plyne, že zavedený vektor $x(t)$ splňuje diferenciální rovnici :

$$x'(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{p_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -p_1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -p_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & & & & \\ 0 & -p_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{A(t)}} x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -q(t) \end{bmatrix}}_{\text{f(t)}} \qquad (6)$$

Matici $A(t)$ rozdělme na pole:

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{bmatrix},$$

kde $A_i(t)$ $(i = 1, ..., 4)$ jsou čtvercové $n \times n$ matice. Vektor $f(t)$ rozdělme na dva vektory

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

tak, že $f_i(t)$ $(i = 1, 2)$ má n složek. Z rovnice (6) plyne, že $f_1(t) = 0$.
Matici $D(t)$ z věty (1) rozdělíme na bloky

$$D(t) = (D_1(t), D_2(t))\,,$$

kde $D_1(t)$ a $D_2(t)$ jsou čtvercové matice.
Analogicky rozdělíme matici $C(t)$ z věty (2) na bloky

$$C(t) = (C_1(t), C_2(t))\,,$$

kde $C_1(t)$ a $C_2(t)$ jsou čtvercové matice.

Pro samoadjungovanou semidefinitní úlohu lze dokázat, že matice $D_1(t)TD_2^T(t)$ je symetrická a pozitivně semidefinitní. Z toho dál plyne, že matice $D_1(t) - D_2(t)T$ je regulární pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$ a všechny přípustné přesuny. Analogicky lze dokázat, že matice $C_1(t) + C_2(t)T$ je regulární. Normalizovanou pravou přesunutou podmínku dostaneme z obecné přesunuté podmínky

$$(D_1(t), D_2(t))\, x(t) = d(t)$$

tak, že ji vynásobíme zleva maticí

$$(D_1(t) - D_2(t)T)^{-1}\,.$$

Označme:

$$\begin{aligned} G(t) &= (D_1(t) - D_2(t)T)^{-1}\, D_1(t) \\ g(t) &= (D_1(t) - D_2(t)T)^{-1}\, d(t). \end{aligned}$$

Lze ukázat, že

$$(D_1(t) - D_2(t)T)^{-1}\, D_2(t) = (G(t) - I)\, T$$

Normalizovaná pravá přesunutá podmínka pak má tvar:

$$(G(t), (G(t) - I)\, T)\, x(t) = g(t) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$$

Označme:

$$\begin{aligned} H(t) &= (C_1(t) + C_2(t)T)^{-1}\, C_1(t) \\ h(t) &= (C_1(t) + C_2(t)T)^{-1}\, c(t). \end{aligned}$$

Lze ukázat, že

$$(C_1(t) + C_2(t)T)^{-1}\, C_2(t) = (I - H(t))\, T$$

Normalizovaná levá přesunutá podmínka pak má tvar:

$$(H(t), (I - H(t))\, T)\, x(t) = h(t) \quad \forall t \in \langle a, b\rangle$$

Věta 3 *Za našich předpokladů existuje absolutně spojitá matice $G(t)$ a absolutně spojitý vektor $g(t)$, které jsou řešením následujících diferenciálních rovnic:*

$$\begin{aligned}
G'(t) &= G(t)A_2(t)TG(t) - (G(t)-I)TA_3(t)(G(t)-I) - G(t)A_1(G(t)-I) - \\
&\quad -(G(t)-I)A_1^T G(t) \\
g'(t) &= (G(t)-I)Tf_2(t) - G(t)(A_1 - A_2(t)T)g(t) - (G(t)-I)T(A_3(t) - A_4T)g(t)
\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned}
G(a) &= (U_1 - U_2T)^{-1}U_1, \\
g(a) &= (U_1 - U_2T)^{-1}u.
\end{aligned}$$

Řešení $x(t)$ našeho okrajového problému splňuje přesunutou podmínku:

$$(G(t), (G(t)-I)T)x(t) = g(t) \quad \text{pro } t \in \langle a, b\rangle.$$

Analogicky je možné vyslovit větu i pro tento speciální přesun pravé okrajové podmínky.

Věta 4 *Za našich předpokladů existuje spojitá matice $H(t)$ a absolutně spojitý vektor $h(t)$, které jsou řešením diferenciálních rovnic*

$$\begin{aligned}
H'(t) &= -H(t)A_2(t)TH(t) - (I-H(t))TA_3(t)(I-H(t)) + H(t)A_1(I-H(t)) + \\
&\quad +(I-H(t))A_1^T H(t) \\
h'(t) &= -H(t)(A_1 + A_2(t)T)h(t) + (I-H(t))Tf_2(t) - (I-H(t))T(A_3(t) + A_4T)h(t)
\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned}
H(b) &= (V_1 + V_2T)^{-1}V_1, \\
h(b) &= (V_1 + V_2T)^{-1}v.
\end{aligned}$$

Řešení $x(t)$ naší úlohy splňuje přesunutou podmínku

$$(H(t), (I-H(t))T)x(t) = h(t) \quad \text{pro } t \in \langle a, b\rangle.$$

Věta 3 a 4 definují speciální přesun podmínek, který využívá daných symetrií a znaménkových předpokladů. Lze ukázat, že matice $G(t)$, $I - G(t)$, $H(t)$ a $I - H(t)$ jsou symetrické a pozitivně semidefinitní pro všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Z toho plyne, že vlastní čísla matice $G(t)$ a $H(t)$ leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, tedy řešení Riccatiho maticových rovnic je ohraničené na celém intervalu. Přesunuté matice mají tvar:

$$\begin{aligned}
D(t) &= (G(t), (G(t)-I)T), \\
d(t) &= g(t), \\
C(t) &= (H(t), (I-H(t))T), \\
c(t) &= h(t).
\end{aligned}$$

V případě, že naše úloha má jediné řešení, můžeme řešení hledat ze soustavy

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ C(t) \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} d(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \langle a, b \rangle.$$

V algoritmu A matici $R(t)$ volíme takto: $R(t) = (I, T)$ V algoritmu B matici $R(t)$ volíme takto: $R(t) = (I, -T)$. V těchto algoritmech se uplatní identity:

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ R(t) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} G(t), & (G(t) - I)T \\ I, & T \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I, & I - G(t) \\ -T, & TG(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ C(t) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I, & -T \\ H(t), & (I - H(t))T \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I - H(t), & I \\ -TH(t), & T \end{pmatrix}.$$

4 Závěr

Použití metody přesunu pro obecnou úlohu ψ vyžaduje nemalé úsilí zajistit, aby použitý přesun podmínek byl numericky stabilní. Ukazuje se, že pro speciální úlohu ψ, která vznikne ze samoadjungované pozitivně semidefinitní úlohy, existuje speciální přesun podmínek, kdy matice soustavy, která realizuje přesun podmínek, je dána symetrickou maticí, kterou získáme řešením jisté Ricattiho maticové rovnice, přičemž o vlastních číslech této matice víme, že leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. To v důsledku dává, že uvedený speciální přesun podmínek je numericky stabilní. Vzhledem ke speciální jednoduché struktuře koeficientů v diferenciálních rovnicích ve větách (3) a (4) je výpočet pravých stran těchto rovnic velmi jednoduchý.

Reference

[1] Taufer J.: *Lösung der Randwertprobleme für Systeme von linearen Differentialgleichungen*, Rozpravy Českosl. akad. věd., Řada Mat. přírod. věd 83, No.5, Praha 1973.

[2] Taufer J.: *Solution of boundary value problems for systems of linear differential equations.*, Nauka, Moscow 1981. (In Russian.)

[3] Meyer G.H.: *Initial value methods for boundary value problems – Theory and applications of invariant imbedding*, Academic Press, New York, 1973.

[4] Reid W. T.: *Riccati differential equations*, Academic Press, New York, 1972.

[5] Scott M.R.: *Invariant imbedding and its applications to ordinary differential equations*, Addison-Wesley Publishing Company, 1973.

[6] Ahiezer, N.I., Glazman, I.M.: *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Pitman, Boston 1981.

[7] Higham, N.J.: *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, Philadelphia 1996.