Matematická logika

Rostislav Horčík

horcik@math.feld.cvut.cz
horcik@cs.cas.cz
www.cs.cas.cz/~horcik

Sémantická věta o dedukci

Věta

Pro množinu formulí S a formule φ a ψ platí

$$S \cup \{\varphi\} \models \psi \text{ právě tehdy, když } S \models \varphi \Rightarrow \psi.$$

Důkaz

- Zleva doprava: nechť $u(S) = 1$. Pokud $u(\varphi) = 0$, pak $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$. Pokud $u(\varphi) = 1$, pak z předpokladu plyne $u(\psi) = 1$, tj. $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$.
- Zprava doleva: nechť $u(S \cup \{\varphi\}) = 1$, tj. $u(\varphi) = 1$ a $u(S) = 1$. Takže z předpokladu plyne $u(\varphi \Rightarrow \psi) = 1$. Z pravdivostní tabulky pro implikaci tedy plyne $u(\psi) = 1$.

Tautologická ekvivalence

Definice

Řekneme, že formule φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní (sémanticky ekvivalentní), jestliže $\varphi \models \psi$ a také $\psi \models \varphi$. Tento fakt označujeme $\varphi \models\!\!\!\!\!= \psi$.

Pozorování

Formule φ a ψ jsou tautologicky ekvivalentní právě tehdy, když pro každé pravdivostní ohodnocení u platí $u(\varphi) = u(\psi)$. Tj. právě tehdy, když formule $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.

Kongruence

Věta

Relace $\models\!\!\!\!\!\dashv$ na množině všech formulí $\mathcal{P}(A)$ je ekvivalence. Navíc, jsou-li $\varphi, \psi, \alpha, \beta$ formule splňující $\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv \psi$ a $\alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \beta$, pak platí

- $\neg\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv \neg\psi$
- $\varphi \wedge \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \psi \wedge \beta$
- $\varphi \vee \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \psi \vee \beta$
- $\varphi \Rightarrow \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \psi \Rightarrow \beta$
- $\varphi \Leftrightarrow \alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \psi \Leftrightarrow \beta$

Důsledek

Nechť φ je formule a α některá její podformule. Pokud $\alpha \models\!\!\!\!\!\dashv \beta$, pak $\varphi \models\!\!\!\!\!\dashv \psi$, kde ψ je formule vzniklá z φ nahrazením podformule α formulí β.

Vlastnosti spojek

Věta

Pro každé formule α, β, γ, tautologii T a kontradickci F platí:

- $\alpha \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\alpha \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$ (idempotence)
- $\alpha \wedge \beta \models\!\!\!\dashv \beta \wedge \alpha$, $\alpha \vee \beta \models\!\!\!\dashv \beta \vee \alpha$ (komutativita)
- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ (asociativita)
- $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha$, $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \alpha$ (absorpce)
- $\neg\neg\alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$ (zákon dvojné negace)
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \models\!\!\!\dashv \neg\alpha \vee \neg\beta$, $\neg(\alpha \vee \beta) \models\!\!\!\dashv \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (De Morganovy zákony)
- $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models\!\!\!\dashv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (Distributivita)
- $T \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$, $T \vee \alpha \models\!\!\!\dashv T$, $F \wedge \alpha \models\!\!\!\dashv F$, $F \vee \alpha \models\!\!\!\dashv \alpha$
- $\alpha \wedge \neg\alpha \models\!\!\!\dashv F$, $\alpha \vee \neg\alpha \models\!\!\!\dashv T$

Booleovské funkce

Definice

Zobrazení $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ se nazývá Booleovská fce. Každé formuli φ sestavenou z výrokových proměnných $x_1, \dots, x_n$ můžeme přiřadit Booleovskou funkci $f_\varphi\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ takto

$$f_\varphi(a_1, \dots, a_n) = u(\varphi)\,,$$

kde u je ohodnocení takové, že $u(x_i) = a_i$.

Tvrzení

Pro dvě formule φ a ψ platí $\varphi \models\!\!\!\!\dashv \psi$ právě tehdy, když $f_\varphi = f_\psi$.

Normální formy

Definice

- Literál je logická proměnná nebo negace logické proměnné.
- Řekneme, že formule je v disjunktivním normálním tvaru (DNF), jestliže je disjunkcí jedné nebo několika formulí, z nichž každá je literálem nebo konjunkcí literálů.
- Řekneme, že formule je v konjunktivním normálním tvaru (CNF), jestliže je konjunkcí jedné nebo několika formulí, z nichž každá je literálem nebo disjunkcí literálů.

Příklad

- DNF: $(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z)$
- CNF: $(x \vee \neg y) \wedge (y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z)$

Disjunktivní normální forma

Věta

Ke každé Booleovské funkci f existuje formule φ v DNF taková, že $f = f_\varphi$.

Důsledek

Ke každé formuli α existuje formule β, která je v DNF a $\alpha \models\!\!\!\!\!\!\!\;\dashv \beta$.

Konjunktivní normální forma

Věta

Ke každé Booleovské funkci f existuje formule φ v CNF taková, že $f = f_\varphi$.

Důsledek

Ke každé formuli α existuje formule β, která je v CNF a $\alpha \models\!\!\!\dashv \beta$.

Unarní spojky

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- f_3 – negace $\neg x$
- f_1 – kontradikce F (nulární)
- f_4 – tautologie T (nulární)

Binární spojky

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- f_1 – kontradikce F
- f_2 – konjunkce $x \wedge y$
- f_8 – disjunkce $x \vee y$

- f_7 – vylučovací nebo (XOR) $x \oplus y \mathrel{|\!\!=\!\!|} \neg(x \Rightarrow y)$

Binární spojky

x	y	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- f_{10} – ekvivalence $x \Leftrightarrow y$
- f_{14} – implikace $x \Rightarrow y$
- f_{16} – tautologie T

- f_9 – Peirceova šipka (NOR) $x \downarrow y \models\!\!\!\dashv \neg(x \vee y)$
- f_{15} – Shefferův operátor (NAND) $x \mid y \models\!\!\!\dashv \neg(x \wedge y)$

Uplný systém spojek

Příklad

$$\varphi = (\neg x \wedge y) \Rightarrow (y \Rightarrow (x \vee \neg y)))\,.$$

Protože $a \Rightarrow b \models\!\!\!\!\!\;\dashv \neg a \vee b$ máme:

$$\varphi \models\!\!\!\dashv \neg(\neg x \wedge y) \vee (\neg y \vee (x \vee \neg y)))$$

$$\varphi \models\!\!\!\dashv \neg\neg x \vee \neg y \vee \neg y \vee x \models\!\!\!\dashv x \vee \neg y$$

Definice

Řekneme, že množina logických spojek Δ tvoří úplný systém logických spojek, jestliže pro každou formuli α existuje formule β s ní tautologicky ekvivalentní, která používá pouze spojky z množiny Δ.

Uplný systém spojek

Tvrzení

Nechť Δ tvoří úplný systém logických spojek a nechť Π je množina spojek. Jestliže platí

- pro každou binární spojku $\Box \in \Delta$ existuje formule α obsahující pouze spojky z množiny Π taková, že $\alpha \models\!\!\!\!\!= x \Box y$,
- pro každou unární spojku $\Diamond \in \Delta$ existuje formule β obsahující pouze spojky z množiny Π taková, že $\beta \models\!\!\!\!\!= \Diamond x$,
- pro každou nulární spojku $K \in \Delta$ existuje formule γ obsahující pouze spojky z množiny Π taková, že $\gamma \models\!\!\!\!\!= K$,

pak Π je také úplný systém logických spojek.

Příklady úplných systémů spojek

Tvrzení

Následující množiny tvoří úplný systém logických spojek:

$$\{\neg, \vee\},\ \{\neg, \wedge\},\ \{\neg, \Rightarrow\},\ \{\Rightarrow, F\},\ \{|\},\ \{\downarrow\}$$

Tvrzení

Množina $\{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ (ani žádná její podmnožina) netvoří úplný systém logických spojek.