1 Komplexní čísla

Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y) reálných čísel x, y nazýváme množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$, jestliže pro každé dvě takové dvojice (x_1, y_1), (x_2, y_2) je definována rovnost, sčítání a násobení následovně:

1. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ právě tehdy když $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$,
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
3. $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Jestliže budeme mnluvit obecně o nějakém komplexním čísle, budeme ho značit jedním písmenem $z = (x, y)$, kde $x = \mathrm{Re}\, z$ se nazývá *reálná část* a $y = \mathrm{Im}\, z$ *imaginární část.*

Ztotožněme dvojici $(x, 0)$ s reálným číslem x. Není težké podle definice operací ověřit, že s takovými dvojicemi počítáme stejně jako s reálnými čísly. Dále označme $j = (0, 1)$ a nazvěme tuto dvojici *imaginární jednotkou.* Potom libovolnou dvojici můžeme vyjádřit takto:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + jy\,,$$

což odpovídá běžně používanému zápisu komplexního čísla v takzvaném *kartézském tvaru.* Proto budeme v dalším textu pro dvojici (x, y) používat tohoto značení. Speciálně $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$.

Takto definovaný algebraický systém (množina + operace) tvoří těleso, t.j. splňuje následující zákony:

Zákon komutativní

$$\begin{aligned} z + w &= w + z\,, \\ zw &= wz\,. \end{aligned}$$

Zákon asociativní

$$\begin{aligned} z + (w + v) &= (z + w) + v\,, \\ z(wv) &= (zw)v\,. \end{aligned}$$

Zákon distributivní

$$z(w + v) = zw + zv\,.$$

Neutrální prvky

$$\begin{aligned} 0 + z &= z\,, \\ 1z &= z\,. \end{aligned}$$

Inverzní prvky

1. Pro všechny $z, w \in \mathbb{C}$ existuje právě jedno $v \in \mathbb{C}$ tak, že platí $z + v = w$. Číslo v nazýváme rozdíl a značíme $v = w - z$. Speciálně $0 - z = -z$ se nazývá číslo opačné k číslu z.
2. Pro všechny $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existuje právě jedno $v \in \mathbb{C}$ tak, že platí $zv = w$. Číslo v nazýváme podíl a značíme $v = \frac{w}{z}$. Speciálně $\frac{1}{z} = z^{-1}$ se nazývá reciproké číslo k číslu z.

Příklad 1.1 Nechť $z = x_1 + jy_1$ a $w = x_2 + jy_2$. Pak rozdíl $w - z = x_2 - x_1 + j(y_2 - y_1)$. Dále předpokádejme, že $z \neq 0$. Chceme dokázat, že podíl $\frac{w}{z}$ je jednoznačně definován a nalézt jeho kaztézský tvar. Označme $\frac{w}{z} = a + jb$. Pak pro podíl musí platit:

$$w = z\frac{w}{z} = (x_1 + jy_1)(a + jb)\,.$$

Po dosazení za w a vynásobení pravé strany dostáváme tedy:

$$x_2 + jy_2 = x_1 a - y_1 b + j(x_1 b + y_1 a)\,.$$

Z definice rovnosti komplexních čísel dostaneme soustavu lineárních rovnic, kde a, b jsou neznámé:

$$\begin{aligned} x_1 a - y_1 b &= x_2\,, \\ y_1 a + x_1 b &= y_2\,. \end{aligned}$$

Z lineární algebry víme, že soustava má právě jedno řešení pokud determinant matice soustavy je nenulový, t.j.

$$\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1^2 + y_1^2 \neq 0\,.$$

Protože jsme ale předpokládali, že $z \neq 0$, musí alespoň jedno číslo z x_1 a y_1 být nenulové a tudíž $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$. Tím jsme dokázali, že je podíl jednoznačně definován. Hodnoty a a b můžeme vyjádřit potom např. pomocí Kramerova pravidla:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & -y_1 \\ y_2 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}\,,$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}\,.$$

Máme tedy:

$$\frac{w}{z} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + j\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}\,.$$

Příklad 1.2 Dokažte:

1. $j^2 = -1$; $j^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$,
2. $j^3 = -j$; $j^3 = j^2 j = -1j = -j$,
3. $j^4 = 1$; $j^4 = j^3 j = -jj = -j^2 = -(-1) = 1$,
4. $j^n = j^l$, $l \in \{0,1,2,3\}$; $j^n = j^{4k+l} = j^{4k} j^l = (j^4)^k j^l = 1^k j^l = j^l$.

Číslo komplexně sdružené k číslu $z = x + jy$ značíme $\overline{z}$ a definujeme:

$$\overline{z} = x - jy\,.$$

Tvrzení 1.3 *1.* Re $z = \frac{z+\overline{z}}{2}$,

2. Im $z = \frac{z-\overline{z}}{2j}$,

3. $\overline{\overline{z}} = z$,

4. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$,

5. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

6. $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$ *pro* $z \neq 0$.

Důkaz:

1. $z + \overline{z} = (x+jy) + (x-jy) = 2x = 2\text{Re } z$,
2. $z - \overline{z} = (x+jy) - (x-jy) = 2jy = 2j\text{Im } z$,
3. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x+jy}} = \overline{x-jy} = x - (-jy) = x + jy = z$,
4. $\overline{z+w} = \overline{(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2)} = \overline{x_1+x_2+j(y_1+y_2)} = x_1+x_2-j(y_1+y_2) = x_1 - jy_1 + x_2 - jy_2 = \overline{z} - \overline{w}$,
5. domácí úkol,
6. protože $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \overline{w\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{w}\,\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$, stačí ukázat že $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, zbytek domácí úkol. □

Absolutní hodnotu (modul) komplexního čísla $z = x + jy$ definujeme:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Tvrzení 1.4 *1.* $|z| = 0$ *právě tehdy když* $z = 0$ *a* $|z| > 0$ *pravě tehdy když* $z \neq 0$.

2. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.

3. $|\text{Re } z| \leq |z|$, $|\text{Im } z| \leq |z|$.

4. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

5. $|zw| = |z||w|$.

6. $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$ *pro* $z \neq 0$.

7. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(trojúhelníková nerovnost).*

8. $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

DŮKAZ:

1.–3. Zřejmé.

4. $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(x + jy)(x - jy)} = \sqrt{x^2 + y^2 + j(xy - xy)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

5. $|zw| = \sqrt{(zw)\overline{(zw)}} = \sqrt{(zw)(\overline{z}\,\overline{w})} = \sqrt{(z\overline{z})(w\overline{w})} = |z||w|$.

6. Domácí úkol.

7. $|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w = |z|^2 + |w|^2 + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w$. Všimeme si, že $\overline{z}w$ je komplexně sdružené číslo k číslu $z\overline{w}$, protoze $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\,\overline{\overline{w}} = \overline{z}w$. Dále podle Tvrzení 1.3(1) dostáváme $z\overline{w} + \overline{z}w = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\text{Re}(z\overline{w})$. Můžeme tedy pokračovat $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\text{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2$ (kde jsme využili Tvrzení 1.4(3, 5, 2). Máme tedy $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Protože $|z + w|$ a $|z| + |w|$ jsou nezáporná reálná čísla, můžeme nerovnici odmocnit a dostáváme $|z + w| \leq |z| + |w|$.

8. Domácí úkol. □

Pomocí komplexně sdruženého čísla z a modulu komplexního čísla z můžeme úsporněji vyjádřit podíl komplexního čísla w a z, $z \neq 0$:

$$\frac{w}{z} = \frac{w}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Příklad 1.5

$$\frac{3 + j2}{5 + j} = \frac{(3 + j2)(5 - j)}{|5 + j|^2} = \frac{17 + j7}{26}\,.$$

Protože komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel, můžeme každé komplexní číslo $z = x + jy = (x, y)$ reprezentovat bodem v rovině o souřadnicích x a y nebo vektorem z počátku do tohoto bodu. Všimeme si, že sčítání a odčítání komplexních čísel vskutku odpovídá sčítání a odčítání odpovídajích vektorů.

Bod v rovině o souřadnicích x a y můžeme ovšem popsat i pomocí polárních souřadnic, t.j. pomocí vzdálenosti r od počátku a úhlu φ, který svírá vektor (x, y) a vektor $(1, 0)$. Potom platí:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,. \tag{1}$$

Pokud $(x, y) = (0, 0)$ je $r = 0$ a uvedené rovnice platí pro libovolný úhel φ. Odtud tedy plyne, že každé komplexní číslo $z = x + jy = r\cos\varphi + jr\sin\varphi$, kde r je vzdálenost od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. Dostáváme tedy tzv. *goniometrický tvar* čísla z:

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)\,.$$

Využijeme-li Eulerův vztah: $\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$, dostaneme tzv. *exponenciální tvar*:

$$z = |z|e^{j\varphi}\,.$$

Je-li $z \neq 0$, pak množina všech úhlů splňující rovnice 1 se nazývá *argument* komplexního čísla z a značí se Arg z. Pokud $\varphi \in \mathrm{Arg}\ z$ a $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$ označíme $\varphi = \arg z$ a nazýváme ho *hlavní hodnotou argumentu* z. Zřejmě platí:

$$\mathrm{Arg}\ z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Dále je zřejmé, že hodnotu $\arg z$ můžeme spočítat pomocí funkce arctan, musíme, ale nejprve zjistit v jakém kvadrantu se číslo z nachází a podle toho upravit výpočet.

Jiná možnost jak hodnotu $\arg z$ vyjádřit je následující:

$$\arg z = \begin{cases} 2\arctan\frac{\mathrm{Im}\ z}{|z| + \mathrm{Re}\ z}\,, & z \notin M\,, \\ \pi\,, & z \in M\,, \end{cases}$$

kde $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z = 0,\ \mathrm{Re}\ z < 0\}$. Promyslete si, proč předchozí vztah platí!

Příklad 1.6 Dokažte, že platí:

1. $$e^{j\varphi_1}e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\,,$$

2. $$\frac{e^{j\varphi_1}}{e^{j\varphi_2}} = e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}\,.$$

Řešení:

1. $$\begin{aligned} e^{j\varphi_1}e^{j\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &= e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\,. \end{aligned}$$

2. Stačí dokázat $\frac{1}{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^{j\varphi}} &= \frac{1}{\cos\varphi + j\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - j\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \\
&= \cos\varphi - j\sin\varphi = \cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi) \\
&= e^{-j\varphi}\,.
\end{aligned}$$

Z předchzího příkladu plyne, že exponenciální tvar komplexního čísla je vhodný pro výpočet násobení a dělení komplexních čísel, protože platí:

$$\begin{aligned}
zw &= |z|e^{j\varphi_1}|w|e^{j\varphi_2} = |z||w|e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}\,, \\
\frac{w}{z} &= \frac{|w|e^{j\varphi_2}}{|z|e^{j\varphi_1}} = \frac{|w|}{|z|}e^{j(\varphi_2-\varphi_1)}\,.
\end{aligned}$$

Při násobení tedy jenom vynásobíme moduly a sečteme argumenty a při dělení vydělíme moduly a odečteme argumenty. Speciálně pro kladná celá čísla n dostáváme $z^n = (|z|e^{j\varphi})^n = |z|^n e^{jn\varphi}$.