1 Integrál komplexní funkce – pokračování

Definice 1.1 Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ a $F(z)$ je taková funkce, že $F'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in D$. Pak $F(z)$ nazýváme *primitivní funkcí* k funkci $f(z)$ v oblasti D.

Protože při integraci funkce f po křivce $\mathcal{C}$, která leží v oblasti, kde je funkce f holomorfní, nezáleží hodnota integrálu na tvaru křivky $\mathcal{C}$, lze ukázat, že hodnota integrálu závisí jen na počátečním a koncovém bodu křivky $\mathcal{C}$ a platí následující věta:

Věta 1.2 *Nechť D je jednoduše souvislá oblast, $z_1, z_2 \in D$, $f(z)$ je holomorfní na D, $F(z)$ je primitivní funkce k funkci $f(z)$ v oblasti D. Pak*

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1)\,.$$

Zápisem $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z$ máme na mysli integrál po nějaké křivce $\mathcal{C}$, která leží v oblasti D a z_1 je její počáteční bod a z_2 koncový.

Příklad 1.3 Spočtěte

$$\int\limits_0^j z e^{z^2} \mathrm{d}z\,.$$

Protože funkce ze^{z^2} je holomorfní na celé Gaussově rovině $\mathbb{C}$ má výše uvedené zadání smysl pro libovolnou křivku začínající v bodě 0 a končící v bodě j.

$$\int\limits_0^j z e^{z^2} \mathrm{d}z = \left[\frac{1}{2}e^{z^2}\right]_0^j = \left(\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{-1} - 1)\,.$$

Příklad 1.4 Spočtěte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \left(e^z - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z\,.$$

kde $\mathcal{C}$ je spodní část jednotkové kružnice $|z| = 1$ začínající v bodě 1 a končící v bodě -1.

Vidíme, že integrovaná funkce není holomorfní v bodě 0. Nicméně snadno lze nalézt jednoduše souvislou oblast D, která obsahuje křivku $\mathcal{C}$, integrovaná funkce je na D holomorfní, t.j. $0 \notin D$ (nakreslete si obrázek!). Můžeme tedy použít větu 1.2 a dostaneme:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \left(e^z - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = \int\limits_1^{-1} \left(e^z - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z = \left[e^z + \frac{1}{z}\right]_1^{-1} = e^{-1} - 1 - e - 1 = e^{-1} - e - 2\,.$$

Příklad 1.5 Spočtěte

$$\int_{\mathcal{C}} \left(jz^2 + 5\overline{z} - \frac{3j}{z} \right) \mathrm{d}z \,,$$

kde $\mathcal{C}$ je levá půlka jednotkové kružnice $|z| = 1$, $\mathrm{Re}\ z \le 0$ a je orientována v protisměru ručičkových hodinek.

Výpočet rozdělíme na výpočet integrálu z funkce jz^2 a z funkce $5\overline{z} - \frac{3j}{z}$. První funkce je holomorfní na $\mathbb{C}$, takže můžeme použít větu 1.2.

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}} jz^2 \mathrm{d}z = j \int_{j}^{-j} z^2 \mathrm{d}z = j \left[\frac{z^3}{3} \right]_{j}^{-j} = j \left(\frac{j}{3} - \frac{-j}{3} \right) = -\frac{2}{3} \,.$$

Integrál z druhé funkce spočítáme z definice integrálu komplexní funkce. Čtenář by mohl namítnout, že lze nalézt jednoduše souvislou oblast D na které je funkce $\frac{3j}{z}$ holomorfní a která obsahuje křivku $\mathcal{C}$ a tudíž použít i na funkci $\frac{3j}{z}$ větu 1.2 jako v předchozím příkladě. Nicméně v tomto případě toto nemůžeme udělat, protože nejsme schopni nalézt primitivní funkci. Funkce $\log(z)$ je sice primitivní funkcí k funkci $\frac{1}{z}$, ale jen tam, kde existuje $\log'(z)$. Protože křivka $\mathcal{C}$ protíná nekladnou reálnou poloosu, musí i oblast D obsahovat nějaké body z nekladné reálné poloosy. D tedy obsahuje body, kde neexistuje derivace funkce $\log(z)$.

Parametrizujme křivku $\mathcal{C}$:

$$\varphi(t) = e^{jt} \,, \quad \varphi'(t) = je^{jt} \,, \quad t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \,.$$

Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathcal{C}} \left(5\overline{z} - \frac{3j}{z} \right) \mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} \left(5\overline{z} - \frac{3j}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} \right) \mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}} \left(5\overline{z} - \frac{3j\overline{z}}{|z|^2} \right) \mathrm{d}z \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (5e^{-jt} - 3je^{-jt}) je^{jt} \mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (5 - 3j) j \mathrm{d}t = (3 + 5j) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{d}t \\ &= (3 + 5j)\pi \,. \end{aligned}$$

Konečný výsledek dostaneme sečtením:

$$\int_{\mathcal{C}} \left(jz^2 + 5\overline{z} - \frac{3j}{z} \right) \mathrm{d}z = I_1 + I_2 = -\frac{2}{3} + (3 + 5j)\pi \,.$$

V dalším textu se budeme zabývat integrály, při jejichž výpočtu se používá Cauchyův integrální vzorec pro n-tou derivaci.

Věta 1.6 *Nechť $D \subseteq \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast, na které je $f(z)$ holomorfní a nechť $\mathcal{C}$ je jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná taková, že $\mathcal{C} \subseteq D$. Pak pro $n = 0, 1, 2 \ldots$ a každé $z_0 \in \operatorname{Int} \mathcal{C}$ platí:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \,,$$

kde symbol $f^{(n)}(z_0)$ značí n-tou derivaci funkce f v bodě z_0. Speciálně pro $n = 0$ platí:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \,.$$

Příklad 1.7 Spočtěte integrály

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}} \, \mathrm{d}z \,, \qquad \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} \, \mathrm{d}z \,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}$.

Protože funkce $\sin z$ je holomorfní na $\mathbb{C}$, můžeme použít větu 1.6. Máme tedy:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{z - \frac{\pi}{2}} \, \mathrm{d}z = 2\pi j \sin \frac{\pi}{2} = 2\pi j \,,$$

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} \, \mathrm{d}z = 2\pi j \sin' \frac{\pi}{2} = 2\pi j \cos \frac{\pi}{2} = 0 \,.$$

Příklad 1.8 Spočtěte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{z + 4}{z^2 + 2z + 5} \, \mathrm{d}z \,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z + 1 - j| = 2$.

Rozložíme jmenovatel integrované funkce na součin kořenových činitelů:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2j \,.$$

Dostáváme tedy:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{z + 4}{z^2 + 2z + 5} \, \mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{z + 4}{(z + 1 - 2j)(z + 1 + 2j)} \, \mathrm{d}z \,.$$

Protože křivka $\mathcal{C}$ obíhá jen jeden z kořenů (konkrétně kořen $-1+2j$), dostáváme, že funkce $\frac{z+4}{z+1+2j}$ je holomorfní na $\mathcal{C}$ i na Int $\mathcal{C}$. Můžeme tedy použít větu 1.6.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \frac{z+4}{(z+1-2j)(z+1+2j)}\,\mathrm{d}z &= \int_{\mathcal{C}} \frac{\frac{z+4}{z+1+2j}}{z+1-2j}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi j\,\frac{-1+2j+4}{-1+2j+1+2j} = 2\pi j\,\frac{3+2j}{4j} \\
&= \frac{\pi}{2}(3+2j)\,.
\end{aligned}$$

Věta 1.9 *Nechť D je $(n+1)$-násobně souvislá oblast s kladně orientovanou hranicí (t.j. je určena kladně orientovanými křivkami $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$). Pak pro každou funkci $f(z)$, která je holomorfní na D a spojitá na $\overline{D} = D \cup \mathcal{C}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$ platí:*

$$\int_{\mathcal{C}_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\mathcal{C}_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-\mathcal{C}_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{-\mathcal{C}_n} f(z)\mathrm{d}z\,.$$

Speciálně pro $n = 1$:

$$\int_{\mathcal{C}_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\mathcal{C}_1} f(z)\mathrm{d}z\,.$$

Příklad 1.10 Spočtěte

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z-j| = 2$.

Vidíme, že integrovaná funkce má dvě singularity (t.j. body, kde není holomorfní). Jedna je v bodě 0 a druhá je v bodě 1. Singularita v bodě 0 je od středu j kružnice $\mathcal{C}$ vzdálena 1 a singularita v bodě 1 je od něj vzdálena $\sqrt{2}$. To znamená, že křivka $\mathcal{C}$ obíhá obě tyto singularity a nelze tedy použít stejný přístup jako v předchozím příkladě. Nicméně najdeme-li dvě kladně orientované kružnice $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$ takové, že $\mathcal{C}_1$ obíhá 0 a $\mathcal{C}_2$ obíhá 1 a vzájemně se neprotínají, můžeme pak použít větu 1.9. Je zřejmé, že takové kružnice lze najít (nakreslete si obrázek!). Podle věty 1.9 pak lze zadaný integrál spočítat jako součet dvou integrálů podle $\mathcal{C}_1$ a $\mathcal{C}_2$.

Spočtěme tedy tyto dva integrály. Z věty 1.6 dostáváme:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{e^0}{(1-0)^3} = 2\pi j\,,$$

$$\int_{\mathcal{C}_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\mathcal{C}_2} \frac{-\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{2!}\left(-\frac{e^z}{z}\right)''(1)\,,$$

kde výraz $\left(-\frac{e^z}{z}\right)''(1)$ značí druhou derivaci funkce $-\frac{e^z}{z}$ v bodě 1. Hledejme tedy druhou derivaci:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{e^z}{z}\right)' &= -\frac{e^z z - e^z}{z^2} = -\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2}\,, \\
\left(-\frac{e^z}{z}\right)'' &= \left(-\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2}\right)' = -\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2} + \frac{e^z z^2 - e^z 2z}{z^4} \\
&= -\frac{e^z}{z} + 2\,\frac{e^z}{z^2} - 2\,\frac{e^z}{z^3}\,,
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy $\left(-\frac{e^z}{z}\right)''(1) = -e$. Po dosazení

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{2!}\left(-\frac{e^z}{z}\right)''(1) = -\pi j e\,,$$

Výsledný integrál dostaneme sečtením:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi j - \pi j e = \pi j(2-e)\,.$$