1 Nulové body holomorfní funkce

Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ nazýváme *nulový bod* funkce $f(z)$, jestliže $f(z_0) = 0$. Je-li funkce $f(z)$ holomorfní v bodě z_0, pak lze funkci $f(z)$ v jistém okolí bodu z_0 rozvinout v Taylorovu řadu:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \,.$$

Bod z_0 je v takovém případě nulovým bodem funkce f právě tehdy, pokud $a_0 = 0$. Je-li $f(z)$ nekonstantní holomorfní funkce v bodě z_0, pak alespoň jeden z koeficientů $a_1, a_2, \ldots$ je různý od nuly.

Definice 1.1 Nechť $f(z)$ je nekonstantní funkce, holomorfní v bodě z_0. Řekneme, že nulový bod z_0 funkce $f(z)$ je *m-násobný* (*násobnosti m*, *řádu m*) právě tehdy, když prvních m koeficientů v Taylorově rozvoji funkce $f(z)$ se středem v bodě z_0 je nulových, t.j. $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ a $a_m \neq 0$. Jinak vyjádřeno také $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Místo jednonásobný nulový bod říkáme také *jednoduchý nulový bod*.

Pokud tedy je bod z_0 m-násobným nulovým bodem nekonstatní funkce $f(z)$, která je holomorfní v z_0, pak v jistém okolí bodu z_0 můžeme psát:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + a_{m+2}(z - z_0)^{m+2} + \cdots \\ &= (z - z_0)^m \left[a_m + a_{m+1}(z - z_0)^1 + a_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots\right] \end{aligned}$$

V důsledku předchozího vyjádření funkce $f(z)$ dostaneme následující větu.

Věta 1.2 *Bod z_0 je m-násobným nulovým bodem funkce $f(z)$ právě tehdy, když v jistém okolí $U(z_0)$ lze funkci $f(z)$ vyjádřit ve tvaru:*

$$f(z) = (z - z_0)^m \Phi(z) \,,$$

kde $\Phi(z_0) \neq 0$ a $\Phi(z)$ je holomorfní funkce v $U(z_0)$.

Příklad 1.3 Určete násobnost nulového bodu $z_0 = 0$ funkce $f(z) = z - \sin z$.

Z Taylorova rozvoje funkce $\sin z$ se středem $z_0 = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} z - \sin z &= z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - (z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \cdots) \\ &= z^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}z^2 + \frac{1}{7!}z^4 - \cdots) \end{aligned}$$

Násobnost nulového bodu $z_0 = 0$ je tedy 3.

Pomocí věty 1.2 lze integrály z podílu dvou holomorfních funkcí spočítat pomocí následujících dvou vět.

Věta 1.4 *Nechť f a h jsou holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$, nechť $\mathcal{C}$ je jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka v D. Nechť h má v $\operatorname{Int} \mathcal{C}$ jediný nulový bod z_0 a na $\mathcal{C}$ nemá žádné nulové body. Nechť násobnost nulového bodu z_0 funkce h je m ($m \in \mathbb{N}$). Pak*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{h(z)} \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi j}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m \frac{f(z)}{h(z)} \right]^{(m-1)} .$$

Speciálně pro $m = 1$ je

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{h(z)} \,\mathrm{d}z = 2\pi j \frac{f(z_0)}{h'(z_0)} .$$

Věta 1.5 *Jsou-li f a h jsou holomorfní funkce v jednoduše souvislé oblasti $D \subseteq \mathbb{C}$, $\mathcal{C}$ jednoduchá uzavřená kladně orientovaná křivka v D, přičemž funkce h má nulové body z_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ násobností m_i ($m_i \in \mathbb{N}$) v $\operatorname{Int} \mathcal{C}$ a žádný nulový bod funkce h neleží na $\mathcal{C}$. Pak*

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{h(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathcal{C}_i} \frac{f(z)}{h(z)} \,\mathrm{d}z ,$$

kde $\mathcal{C}_i$ jsou jednoduché uzavřené kladně orientované křivky vlastností: $z_i \in \operatorname{Int} \mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_i \subseteq \operatorname{Int} \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_i \subseteq \operatorname{Ext} \mathcal{C}_k$ $i \neq k$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Příklad 1.6 Spočtěte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \tan z \,\mathrm{d}z ,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z - \frac{5}{3}\pi| = \frac{\pi}{3}$.

Funkce $\tan z$ lze vyjádřit jako podíl funkcí $\sin z$ a $\cos z$. Pokud bychom hledali nulové body funkce $\cos z$ (tzn. řešili bychom rovnici $\cos z = 0$), dostali bychom, že množina nulových bodů je $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (spočtete si!). Dále není težké nahlédnout, že kružnice $\mathcal{C}$ obíhá právě jeden nulový bod a to bod $\frac{3}{2}\pi$ (nakreslete si obrázek!). Vzhledem k tomu že funkce $\sin z$ a $\cos z$ jsou holomorfní v $\mathbb{C}$, jsou podmínky věty 1.4 splněny. Nicméně musíme ještě určit násobnost nulového bodu $\frac{3}{2}\pi$. Derivace $(\cos z)'$ v bodě $\frac{3}{2}\pi$ je $-\sin \frac{3}{2}\pi = 1$. To znamená, že člen a_1 Taylorovy řady funkce $\cos z$ se středem $\frac{3}{2}\pi$ bude 1. Násobnost nulového bodu $\frac{3}{2}\pi$ je tedy 1 a lze psát:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \tan z \,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{C}} \frac{\sin z}{\cos z} \,\mathrm{d}z = 2\pi j \frac{\sin \frac{3}{2}\pi}{-\sin \frac{3}{2}\pi} = -2\pi j$$

Příklad 1.7 Spočtěte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{z}{\sin z \,(\sin z - \cos z)} \,\mathrm{d}z ,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$.

Nejprve opět musíme nalézt nulové body jmenovatele integrované funkce. Je zřejmé, že jmenovatel bude rovný nule pokud platí alespoň jedna z následujících rovností:

$$\sin z = 0\,, \qquad \sin z - \cos z = 0\,.$$

První rovnice má množinu řešení $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Hledejme řešení druhé rovnice. Po dosazení z definice funkcí $\sin z$ a $\cos z$ dostaneme:

$$\frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}) - \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) = 0\,,$$

po roznásobení $2j$ máme:

$$e^{jz} - e^{-jz} - je^{jz} - je^{-jz} = 0\,.$$

Substitucí $p = e^{jz}$ a upravením dostaneme:

$$p - p^{-1} - jp - jp^{-1} = 0\,,$$

$$(1-j)p^2 - (1+j) = 0\,.$$

Tedy

$$p^2 = \frac{1+j}{1-j} = \frac{1+j}{1-j}\,\frac{1+j}{1+j} = \frac{(1+j)^2}{2} = \frac{1+2j-1}{2} = j\,.$$

a

$$p \in \sqrt{j} = \{e^{j\frac{\pi}{4}}, e^{-j\frac{3}{4}\pi}\}\,.$$

Po dosazení zpět za p obdržíme:

$$jz \in \operatorname{Log}(e^{j\frac{\pi}{4}}) \cup \operatorname{Log}(e^{-j\frac{3}{4}\pi})\,,$$

což po spočtení logaritmů dává $z \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Sjednocením dostaneme nulové body funkce $\sin z\,(\sin z - \cos z)$, t.j.

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Je tedy patrné, že kružnice $\mathcal{C}$ obíhá dva nulové body a to bod 0 a bod $\frac{\pi}{4}$. Věta 1.5 říká, že můžeme výpočet integrálu rozložit na výpočet dvou integrálů, pokud nalezneme křivku $\mathcal{C}_1$, která obíhá bod 0 a křivku $\mathcal{C}_2$, která obíhá $\frac{\pi}{4}$ tak, že $\mathcal{C}_1 \subseteq \operatorname{Ext} \mathcal{C}_2$ a $\mathcal{C}_2 \subseteq \operatorname{Ext} \mathcal{C}_1$. Pokud zvolíme dostatečně malé poloměry, tak jistě existují takové dvě kružnice $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, které splňují výše uvedené podmínky např. $\mathcal{C}_1 : |z| = 0.1$ a $\mathcal{C}_2 : |z - \frac{\pi}{4}| = 0.1$ (nakreslete si obrázek!).

Spočtěme tedy integrál po křivce $\mathcal{C}_1$. Je zřejmé, že na $\mathcal{C}_1$ a na $\operatorname{Int} \mathcal{C}_1$ je funkce $\frac{z}{\sin z - \cos z}$ holomorfní a tudíž budeme počítat následující integrál:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{z}{\sin z - \cos z}}{\sin z}\, \mathrm{d}z\,.$$

Určíme násobnost nulového bodu 0. Protože $(\sin z)' = \cos z$ a $\cos 0 = 1$, dostáváme, že násobnost nulového bodu je 1. Z věty 1.4 plyne:

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{z}{\sin z - \cos z}}{\sin z}\,\mathrm{d}z = 2\pi j \frac{\frac{0}{\sin 0 - \cos 0}}{\cos 0} = 0\,.$$

Nyní spočítejme integrál po křivce $\mathcal{C}_2$. Je zřejmé, že funkce $\frac{z}{\sin z}$ je holomorfní na $\mathcal{C}_2$ a na Int $\mathcal{C}_2$, takže budeme počítat tento integrál:

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{\frac{z}{\sin z}}{\sin z - \cos z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Určíme násobnost nulového bodu $\frac{\pi}{4}$. Protože $(\sin z - \cos z)' = \cos z + \sin z$ a $\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, dostaneme, že $\frac{\pi}{4}$ je jednoduchý nulový bod (t.j. má násobnost 1). Tudíž z věty 1.4 obdržíme:

$$\int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{\frac{z}{\sin z}}{\sin z - \cos z}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = 2\pi j\,\frac{2\,\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = j\,\frac{\pi^2}{2}\,.$$

Výsledný integrál dostaneme sečtením:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{z}{\sin z\,(\sin z - \cos z)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{z}{\sin z - \cos z}}{\sin z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{\frac{z}{\sin z}}{\sin z - \cos z}\,\mathrm{d}z = j\,\frac{\pi^2}{2}\,.$$

Příklad 1.8 Spočtěte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{\sin^2 z}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$.

Hledejme nejprve nulové body jmenovatele $\sin^2 z$. Je zřejmé, že $\sin^2 z = 0$ právě tehdy, když $\sin z = 0$. Hledaná množina nulových bodů tedy je

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Kružnice $\mathcal{C}$ obíhá jen jeden nulový bod a to bod 0. Určeme násobnost tohoto nulového bodu. Nalezněme prvních několik členů Taylorova rozvoje funkce $\sin^2 z$ se středem v bodě 0.

$$\begin{aligned}
\sin^2 z &= \left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\right)\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\right) \\
&= z^2 - \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right)z^4 + \cdots = z^2 - \frac{1}{3}z^4 + \cdots \\
&= z^2\left(1 - \frac{1}{3}z^2 + \cdots\right) = z^2\Phi(z)\,.
\end{aligned}$$

To znamená, že nulový bod 0 má násobnost 2. Dále je z Taylorova rozvoje patrné, že $\Phi(0) = 1$ a $\Phi'(0) = 0$ (derivováním člen po členu).

Z věty 1.4 tedy dostáváme:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{\sin^2 z}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\pi j}{1!} \lim_{z\to 0} \left(z^2 \frac{e^z}{\sin^2 z} \right)' = 2\pi j \lim_{z\to 0} \left(z^2 \frac{e^z}{z^2 \Phi(z)} \right)' \\
&= 2\pi j \left(\frac{e^z}{\Phi(z)} \right)' (0) = 2\pi j \left(\frac{e^0 \Phi(0) - e^0 \Phi'(0)}{\Phi^2(0)} \right) \\
&= 2\pi j \left(\frac{1-0}{1} \right) = 2\pi j\,.
\end{aligned}$$

Výraz $\left(\frac{e^z}{\Phi(z)}\right)'(0)$ vyjadřuje derivaci funkce $\frac{e^z}{\Phi(z)}$ v bodě 0.

Příklad 1.9 Spočtěte

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z - \pi j| = 2\pi$.

Nalezněme nulové body jmenovatele integrované funkce. Je zřejmé, že nulové body budou všechna řešení rovnice $e^z = 1$. To znamená, že množina nulových bodů je $\{j2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Takže kružnice $\mathcal{C}$ obíhá dva nulové body a to bod 0 a bod $2\pi j$. Podle věty 1.5 se tedy výpočet rozpadne na výpočet dvou integrálů podle kladně orientovaných kružnic s dostatečně malým poloměrem: $\mathcal{C}_1$ se středem v bodě 0 a $\mathcal{C}_2$ se středem v bodě $2\pi j$.

Zjistěme násobnost nulového bodu 0. Rozvineme funkci $e^z - 1$ do Taylorovy řady se středem v 0.

$$e^z - 1 = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots\right) - 1 = z\left(1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots\right) = z\Phi(z)\,.$$

Pro jmenovatel tedy dostaneme:

$$(e^z - 1)^3 = z^3 \Phi^3(z)\,,$$

kde $\Phi(0) = 1$, $\Phi'(0) = \frac{1}{2}$ a $\Phi''(0) = \frac{1}{3}$. Takže nulový bod 0 má násobnost 3. Z věty 1.4 tedy obdržíme.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\pi j}{2!} \lim_{z\to 0} \left(z^3 \frac{1}{(e^z-1)^3} \right)'' \\
&= \pi j \lim_{z\to 0} \left(\frac{z^3}{z^3 \Phi^3(z)} \right)'' = \pi j \left(\frac{1}{\Phi^3(z)} \right)'' (0)\,.
\end{aligned}$$

Spočítejme tedy druhou derivaci funkce $\frac{1}{\Phi^3(z)}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\Phi^3(z)}\right)' &= -3\frac{\Phi'(z)}{\Phi^4(z)}\,,\\
\left(\frac{1}{\Phi^3(z)}\right)'' &= \left(-3\frac{\Phi'(z)}{\Phi^4(z)}\right)' = -3\frac{\Phi''(z)\Phi^4(z) - 4\Phi^3(z)[\Phi'(z)]^2}{\Phi^8(z)}\\
&= -3\frac{\Phi''(z)}{\Phi^4(z)} + 12\frac{[\Phi'(z)]^2}{\Phi^5(z)}\,.
\end{aligned}$$

Druhá derivace v bodě 0 tedy je:

$$\left(\frac{1}{\Phi^3(z)}\right)''(0) = -3\frac{\Phi''(0)}{\Phi^4(0)} + 12\frac{[\Phi'(0)]^2}{\Phi^5(0)} = -3\frac{1}{3} + 12\frac{1}{4} = 2\,.$$

Dosazením dostáváme:

$$\int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \pi j \left(\frac{1}{\Phi^3(z)}\right)''(0) = 2\pi j\,.$$

Nyní spočítejme integrál po kružnici $\mathcal{C}_2$. Protože platí, že

$$e^{z-2\pi j} = e^z e^{-2\pi j} = e^z\,,$$

dostaneme

$$(e^z-1)^3 = (e^{z-2\pi j}-1)^3 = (z-2\pi j)^3\Phi^3(z-2\pi j)\,.$$

Nulový bod $2\pi j$ má tedy opět násobnost 3 a platí:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\pi j}{2!}\lim_{z\to 2\pi j}\left((z-2\pi j)^3\,\frac{1}{(e^z-1)^3}\right)''\\
&= \pi j \lim_{z\to 2\pi j}\left((z-2\pi j)^3\,\frac{1}{(z-2\pi j)^3\Phi^3(z-2\pi j)}\right)''\\
&= \pi j \left(\frac{1}{\Phi^3(z-2\pi j)}\right)''(2\pi j)\,.
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že

$$\left(\frac{1}{\Phi^3(z-2\pi j)}\right)''(2\pi j) = \left(\frac{1}{\Phi^3(z)}\right)''(0) = 2\,.$$

Dostáváme tedy:

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{1}{(e^z-1)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi j + 2\pi j = 4\pi j\,.$$

2 Využití v reálné analýze

Ukážeme si jak lze metody integrování také použít při integrování reálných funkcí reálné proměnné. Mějme integrál

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde f je nějaká racionální lomená funkce jejíž jmenovatel není nulový pro žádné $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Základní substitucí v integrálech tohoto typu je

$$z = e^{jt} = \cos t + j\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$

Všiměte si, že jak se parametr t mění, bod z opisuje jednotkovou kružnici $|z| = 1$. Dále platí:

$$\frac{1}{z} = e^{-jt} = \cos t - j\sin t\,, \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,.$$

Sečtením a odečtením těchto dvou rovnic dostaneme:

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\,, \quad \sin t = \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)\,.$$

Zbývá určit

$$\mathrm{d}z = je^{jt}\mathrm{d}t = jz\mathrm{d}t\,,$$

a tedy

$$\mathrm{d}t = -\frac{j}{z}\mathrm{d}z\,.$$

Po dosazení můžeme tedy integrál I vyjádřit jako integrál:

$$I = -j\int_{\mathcal{C}} \frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$ a funkce $g(z)$ vznikla z funkce f dosazením za $\cos t$ a $\sin t$.

Příklad 2.1 Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Přepsáním integrálu podle předchozího výkladu dostáváme:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 - 4\cos t}\,\mathrm{d}t = -j\int_{\mathcal{C}} \frac{\left[\frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2}{5 - 4\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]}\,\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$. Upravme nejprve integrovanou funkci.

$$\frac{\left[\frac{1}{2j}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^2}{5-4\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]}\frac{1}{z} = \frac{-\frac{1}{4}(z^2-2+\frac{1}{z^2})}{5z-2z^2-2} = \frac{1}{4}\,\frac{z^4-2z^2+1}{z^2(2z^2-5z+2)}\,.$$

Po rozložení polynomu $2z^2 - 5z + 2$ na součin kořenových činitelů dostáváme:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5-4\cos t}\,\mathrm{d}t = -\frac{j}{4}\int\limits_{\mathcal{C}} \frac{z^4-2z^2+1}{z^2(z-2)(2z-1)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Integrovaná funkce má tři singularity 0, $\frac{1}{2}$ a 2. Kružnice $\mathcal{C}$ obíhá dvě z nich a to 0 a $\frac{1}{2}$. Rozložíme tedy integrál na dva integrály po kružnicích $\mathcal{C}_1 : |z| = 0.1$ a $\mathcal{C}_2 : |z-\frac{1}{2}| = 0.1$.

Pomocí Cauchyova integračního vzorce dostáváme:

$$I_1 = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \frac{\frac{z^4-2z^2+1}{(z-2)(2z-1)}}{z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\left(\frac{z^4-2z^2+1}{(z-2)(2z-1)}\right)'(0) = \frac{5}{2}\pi j\,,$$

kde

$$\left(\frac{z^4-2z^2+1}{(z-2)(2z-1)}\right)' = \frac{4z^3-4z}{(z-2)(2z-1)} - (z^4-2z^2+1)\frac{2z-1+2(z-2)}{(z-2)^2(2z-1)^2}\,.$$

Pro druhý integrál platí:

$$I_2 = \int\limits_{\mathcal{C}_2} \frac{\frac{z^4-2z^2+1}{2z^2(z-2)}}{(z-\frac{1}{2})}\,\mathrm{d}z = 2\pi j\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4-2\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}-2\right)} = -\frac{3}{2}\pi j\,.$$

Pro výsledný integrál tedy dostáváme:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5-4\cos t}\,\mathrm{d}t = -\frac{j}{4}(I_1+I_2) = -\frac{j}{4}\left(\frac{5}{2}\pi j - \frac{3}{2}\pi j\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$