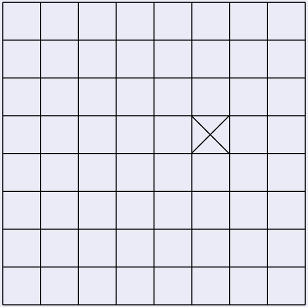
Principy indukce a rekursivní algoritmy

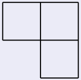
Příklad

Místností rozměru n budeme rozumět šachovnici rozměru $2^n \times 2^n$, ze které je jedno (libovolné) pole vyjmuto. Toto je příklad místnosti rozměru 3:



Příklad (pokrač.)

Trimino je parketa následujícího tvaru:



Dokažte indukcí:

Každou místnost rozměrů $n \geq 1$ *lze vyparketovat triminy.*

$P(n)$ = počet parket k vyparketování místnosti rozměru n

1. $P(1) = 1$.
2. $P(n+1) = 1 + 4 \cdot P(n)$, $n \geq 1$.

Tomu se říká rekurentní rovnice.

Jak vyjádřit hodnoty $P(n)$ explicitně?

Řešení (jisté třídy) rekurentních rovnic — příští přednáška.

Princip slabé indukce

Ať V je nějaká vlastnost přirozených čísel. K tomu, abychom mohli usoudit, že všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ mají vlastnost V, stačí ukázat dvě věci:

1. Základní krok: číslo n_0 má vlastnost V.
2. Indukční krok: číslo $n + 1$ má vlastnost V, pokud předpokládáme, že číslo n má vlastnost V.

Analogie s rekursivním algoritmem

Všechny úlohy rozměru $n \geq n_0$ jsou zpracovány, pokud:

1. Základní krok: úloha rozměru n_0 je zpracována nerekursivně.
2. Rekursivní volání: úloha rozměru $n + 1$ je zpracována, pokud po dekompozici je zpracována úloha rozměru n.

Příklad

Posloupnost $\{F(n)\}_{n=1}^{\infty}$ Fibonacciho čísel je definována rekurentně takto:

$$F(1) = 1, \quad F(2) = 1, \quad F(n+2) = F(n) + F(n+1), \text{ pro } n \geq 1.$$

Dokažte, že pro každé $n \geq 2$ platí rovnost

$$F(n)^2 - F(n-1) \cdot F(n+1) = (-1)^{n-1}.$$

Řešení: indukce podle n.

Příklad, pokrač.

1. Základní krok: platí rovnost pro $n = 2$?

$$F(2)^2 - F(1) \cdot F(3) = (-1)^{2-1} \quad \text{Platí to?}$$

Především: $F(2) = 1$, $F(1) = 1$ a $F(3) = F(1) + F(2) = 2$. Potom

$$F(2)^2 - F(1) \cdot F(3) = 1 - 1 \cdot 2 = -1 = (-1)^1 = (-1)^{2-1},$$

a to jsme chtěli.

Příklad, pokrač.

2. Indukční krok: máme pevné $n \geq 2$ a chceme dokázat rovnost:

$$F(n+1)^2 - F((n+1)-1) \cdot F((n+1)+1) = (-1)^{(n+1)-1}.$$

Snaha o dekomposici:

$$F(n+1)^2 - F((n+1)-1) \cdot F((n+1)+1) =$$

$$F(n+1)^2 - F(n) \cdot F(n+2) =$$

$$F(n+1)^2 - F(n) \cdot (F(n) + F(n+1)) =$$

$$F(n+1)^2 - F(n) \cdot F(n) - F(n) \cdot F(n+1) =$$

$$F(n+1)^2 - F(n)^2 - F(n) \cdot F(n+1) =$$

Příklad, pokrač.

$$F(n+1)^2 - F(n)^2 - F(n) \cdot F(n+1) =$$

$$F(n+1)^2 - F(n)^2 + F(n-1) \cdot F(n+1) -$$

$$- F(n-1) \cdot F(n+1) - F(n) \cdot F(n+1)$$

Dekomponovali jsme: objevili jsme levou stranu úlohy rozměru n.

Můžeme zformulovat indukční předpoklad:

pro pevné $n \geq 2$ platí rovnost

$$F(n)^2 - F(n-1) \cdot F(n+1) = (-1)^{n-1}.$$

Příklad, pokrač.

Takže použitím indukčního předpokladu:

$$F(n+1)^2 - F(n)^2 + F(n-1) \cdot F(n+1) +$$

$$- F(n-1) \cdot F(n+1) - F(n) \cdot F(n+1) =$$

$$F(n+1)^2 - (-1)^{n-1} - F(n-1) \cdot F(n+1) - F(n) \cdot F(n+1) =$$

$$F(n+1)^2 - (-1)^{n-1} - F(n+1) \cdot (F(n-1) + F(n)) =$$

$$F(n+1)^2 - (-1)^{n-1} - F(n+1)^2 =$$

$$-(-1)^{n-1} =$$

$$(-1)^n.$$

Příklad, pokrač.

Dokázali jsme rovnost

$$F(n+1)^2 - F((n+1)-1) \cdot F((n+1)+1) = (-1)^{(n+1)-1}.$$

Indukční krok je u konce.

3. Podle slabého principu indukce je rovnost

$$F(n)^2 - F(n-1) \cdot F(n+1) = (-1)^{n-1}.$$

dokázána pro všechna $n \geq 2$.

Příklad

Co je špatně na následujícím důkazu?

1. Je-li maximum dvou přirozených čísel 0, pak jsou si obě čísla rovna.
2. Předpokládejme, že je-li maximum dvou přirozených čísel n, pak jsou si rovna.
   Vezměme nyní dvě přirozená čísla a, b taková, že jejich maximum je $n+1$. Pak maximum čísel $a-1$ a $b-1$ je n a podle předpokladu je $a-1=b-1$. Tudíž $a=b$.

Podle slabého principu indukce jsou si všechna přirozená čísla rovna.

Příklad

Prvočíselný rozklad přirozeného čísla x je zápis

$$x = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot p_r^{n_r},$$

kde $r \geq 1$ je přirozené číslo, $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ jsou prvočísla a $n_1, n_2, \ldots, n_r$ jsou kladná přirozená čísla.
Dokažte následující tvrzení:

Každé přirozené číslo $x \geq 2$ má prvočíselný rozklad.

Princip silné indukce

Ať V je nějaká vlastnost přirozených čísel. K tomu, abychom mohli usoudit, že všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ mají vlastnost V, stačí ukázat dvě věci:

1. Základní krok: číslo n_0 má vlastnost V.
2. Indukční krok: číslo $n + 1$ má vlastnost V, pokud předpokládáme, že všechna přirozená čísla k, kde $n_0 \leq k < n + 1$, mají vlastnost V.

Analogie s rekursivním algoritmem

Úloha rozměru $n \geq n_0$ je zpracována, pokud:

1. Základní krok: úloha rozměru n_0 je zpracována nerekursivně.
2. Rekursivní volání: úloha rozměru $n + 1$ je zpracována, pokud po dekompozici jsou zpracovány úlohy rozměru k, kde $n_0 \leq k < n + 1$.

Věta

Princip silné indukce je logicky ekvivalentní principu slabé indukce.

Náznak důkazu:

$\Rightarrow$ Platí-li silný princip indukce, platí i slabý princip.

$\Leftarrow$ Využívá faktu, že každá neprázdná konečná množina přirozených čísel má nejmenší prvek. $\blacksquare$

Má každá neprázdná podmnožina přirozených čísel nejmenší prvek?

Princip dobrého uspořádání

Každá neprázdná podmnožina přirozených čísel má nejmenší prvek.

Věta

Princip dobrého uspořádání je logicky ekvivalentní principům indukce.

Důsledek

Přijmeme-li (kterýkoli) princip indukce, musíme přijmout princip dobrého uspořádání. A naopak: přijmeme-li princip dobrého uspořádání, musíme přijmout princip indukce.

Věta

Následující je ekvivalentní:

1. *Princip dobrého uspořádání přirozených čísel.*
2. *V přirozených číslech neexistuje klesající nekonečná posloupnost.*

Důležité v teorii rekursivních algoritmů:

terminaci rekursivního algoritmu zaručí variant (= rozměr dat, který se zmenšuje, nelze však zmenšovat do nekonečna).

Parketující algoritmus

Variant je rozměr místnosti, kterou chceme vyparketovat.

Později

Důkladně prozkoumáme terminaci Eukleidova algoritmu.
Nalezneme variant (zajistíme terminaci) a invariant (zajistíme parciální korektnost).

Obecně u rekursivních algoritmů

1. Terminace: algoritmus ukončí výpočet pro jakákoli přípustná vstupní data.
2. Formule parciální korektnosti: tvrzení, které platí, pokud algoritmus svoji práci ukončí.

Collatzův problém

Otázka terminace následujícího algoritmu:

```
while x > 1 do
      if even(x) then x:=x/2 else x:=3*x+1 endif
endwhile
```

Neví se, zda pro každou přirozenou hodnotu x svou práci skončí či ne.

To znamená: neví se, jak vypadá variant.

Algoritmus se zastaví pro všechny počáteční hodnoty x menší nebo rovny číslu $3 \cdot 2^{53}$ (stav z roku 1999).

Viz například

http://mathworld.wolfram.com/CollatzProblem.html

Formule parciální korektnosti jasná: pokud algoritmus skončí, je $\mathrm{x}=1$.

1. Důkaz indukcí = rekursivní algoritmus.
2. Úzká souvislost s rekurentními rovnicemi (časová náročnost, složitost rekursivního algoritmu).
3. Princip dobrého uspořádání a variant zaručí terminaci rekursivního algoritmu.
4. Musterbeispiel na indukci neexistuje! Viz sbírka řešených příkladů.