10. přednáška

Rostislav Horčík

3. prosince 2007

1 Izomorfní lineární prostory

Definice 1 *Zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ nazýváme izomorfismus, pokud je prosté a na. Říkáme, že dva lineární prostory L_1, L_2 jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$. Tento fakt značíme $L_1 \cong L_2$.*

Poznámka 1 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus. Pak $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$ existuje a je také izomorfismus.*

Věta 1 *Každý lineární prostor L dimenze n je izomorfní s lineárním prostorem $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz: Protože $\dim L = n$, existuje usp. báze $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ lin. prostoru L. Definujme zobrazení $\mathcal{A}\colon L \to \mathbb{R}^n$ takto: $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ v (B). Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je lineární. Nechť $\gamma \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ v (B) a $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{y}$ v (B). Pak

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n + \beta_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \boldsymbol{b}_n = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \boldsymbol{b}_n\,,$$

$$\gamma \cdot \boldsymbol{x} = \gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n) = (\gamma\alpha_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) \cdot \boldsymbol{b}_n\,.$$

Tzn. že souřadnice $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ v (B) jsou $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ a souřadnice $\gamma \cdot \boldsymbol{x}$ v (B) jsou $(\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n)$. Takže

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})\,,$$

$$\mathcal{A}(\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1) = (\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n) = \gamma \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \gamma \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})\,.$$

Protože jsou souřadnice určeny jednoznačně, tak jediný vektor, který má v (B) souřadnice $(0, \dots, 0)$ je $\boldsymbol{o}$. Tzn. že $\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}\}$, tj. $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$. Takže $\mathcal{A}$ je prosté. Nakonec $\mathcal{A}$ je i na, protože ke každé n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ existuje $\boldsymbol{x} \in L$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, konkrétně vektor $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n$. □

Definice 2 *Nechť L je lin. prostor, (B) jeho báze a $\dim L = n$. Pak $[\ ]_B\colon L \to \mathbb{R}^n$ je izomorfismus definovaný $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}$ v bázi (B). K němu inverzní izomorfismus budeme značit $(\ )_B\colon \mathbb{R}^n \to L$, tj. $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B = \boldsymbol{x}$.*

Příklad Nechť L je lin. prostor polynomů stupně nejvýše 2 a $(B) = (x^2, x, 1)$ je jeho báze. Pak L je izormorfní s $\mathbb{R}^3$ a

$$[a_2x^2 + a_1x + a_0]_B = (a_2, a_1, a_0)\,, \qquad (a_2, a_1, a_0)_B = a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Věta 2 *Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *a* $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ *jsou izomorfismy. Pak i* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}\colon L_1 \to L_3$ *je izomorofismus.*

DŮKAZ: Zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ je lineární. Navíc je i prosté, protože složení dvou prostých zobrazení je prosté. Ukážeme, že je na. Protože $\mathcal{A}(L_1) = L_2$ a $\mathcal{B}(L_2) = L_3$ máme

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(L_1) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(L_1)) = \mathcal{B}(L_2) = L_3\,.$$

□

Věta 3 *Dva lineární prostory* L_1, L_2 *konečné dimenze jsou izomorfní p.t.k. mají stejnou dimenzi.*

DŮKAZ: Nechť $\dim L_1 = \dim L_2 = n$. Pak $L_1 \cong \mathbb{R}^n$ a $L_2 \cong \mathbb{R}^n$, tj. existují izomorfismy $\mathcal{A}\colon L_1 \to \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to \mathbb{R}^n$. Takže $\mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus.

Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus, B_1 je báze L_1 a B_2 báze L_2. Protože izomorfismus převádí LN vektory na LN vektory, máme $|B_1| = |\mathcal{A}(B_1)| \leq |B_2|$. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{A}^{-1}$ je také izomorfismus, máme $|B_2| = |\mathcal{A}^{-1}(B_2)| \leq |B_1|$. Takže $|B_1| = |B_2|$, tj. $\dim L_1 = \dim L_2$.

□

2 Matice lineárního zobrazení

Pozorování 1 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (m, n)*. Pak zobrazení* $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definované vztahem*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$$

je lineární.

Věta 4 *Nechť* L_1, L_2 *jsou lin. prostory,* $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ *je báze* L_1 *a* $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m)$ *je báze* L_2*. Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je lineární zobrazení a* $\mathbf{A}$ *je matice, jejíž sloupce tvoří vektory* $[\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C, \ldots, [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C$*. Pak* $\forall \boldsymbol{x} \in L_1$ *platí:*

$$[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B\,.$$

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{x} \in L_1$ a $[\boldsymbol{x}]_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tj. $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n$. Pak

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n) = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)\,.$$

Protože $[\ ]_C$ je lineární zobrazení dostaneme:

$$[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = [\alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C = \alpha_1 [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C + \cdots + \alpha_n [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B\,.$$

□

Matici $\mathbf{A}$ z poslední věty říkáme matice lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C).

Lemma 1 *Nechť* $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ *je linearní zobrazení a* $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in L_1$*. Pak*

$$\mathcal{A}(\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle) = \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) \rangle\,.$$

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{y} \in L_2$. Potom $\boldsymbol{y} \in \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) \rangle$ p.t.k. pro nějaké $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ máme

$$\boldsymbol{y} = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) = \mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n)\,.$$

A to je ekvivalentní tvrzení, že $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\langle \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \rangle)$. □

Věta 5 *Nechť L_1, L_2 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, (B) je báze L_1 a (C) je báze L_2. Pak pro matici $\mathbf{A}$ lin. zobr. $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C) platí* $\operatorname{hod} \mathcal{A} = \operatorname{hod} \mathbf{A}$.

Důkaz: Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a $\dim L_2 = m$. Pak

$$\operatorname{hod} \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}(L_1) = \dim \mathcal{A}(\langle \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \rangle) = \dim \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle\,.$$

Poslední rovnost plyne z předchozího lemmatu. Protože $[\ ]_C\colon L_2 \to \mathbb{R}^m$ je izomorfismus, je linearní obal $\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle$ izomorfní linearnímu prostoru $[\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle]_C$, což opět podle předchozího lemmatu je rovno linearnímu obalu $\langle [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C, \dots, [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C \rangle$. Takže nakonec dostaneme následující rovnosti:

$$\dim \langle \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n) \rangle = \dim \langle [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_1)]_C, \dots, [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_n)]_C \rangle = \operatorname{hod} \mathbf{A}\,.$$

□

Věta 6 *Nechť L_1, L_2 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lin. zobrazení. Pak*

$$\dim L_1 = \operatorname{hod} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A}\,.$$

Důkaz: Nechť $\dim L_1 = n$ a $\mathbf{A}$ je matice lin. zobrazení $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C). Nulové vektory prostorů $L_1, L_2, \mathbb{R}^n$ budeme značit postupně $\boldsymbol{o}_1, \boldsymbol{o}_2, \boldsymbol{o}$. Protože $\operatorname{hod} \mathcal{A} = \operatorname{hod} \mathbf{A}$, stačí ukázat, že $\operatorname{def} \mathcal{A} = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Nechť $M_0 = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}\}$. Víme, že $\dim M_0 = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Ukážeme, že $M_0 \cong \ker \mathcal{A}$, tj. $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} = \dim M_0 = n - \operatorname{hod} \mathbf{A}$. Stačí tedy najít izomorfismus z $\ker \mathcal{A}$ na M_0. Ukážeme, že zobrazení $\mathcal{B}\colon \ker \mathcal{A} \to M_0$ definované předpisem $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]_B$, je onen izomorfismus. Zobrazení $\mathcal{B}$ je tedy jen restrikce zobrazení $[\ ]_B\colon L_1 \to \mathbb{R}^n$ na menší definiční obor $\ker \mathcal{A}$. Zobrazení $\mathcal{B}$ je tedy prosté. Zbývá ukázat, že (1) M_0 je jeho obor hodnot (tj. $\mathcal{B}(\ker \mathcal{A}) \subseteq M_0$) a (2) $\mathcal{B}$ je na M_0.

(1) Nechť $\boldsymbol{x} \in \ker \mathcal{A}$. Pak $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2$. Takže

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{x}]_B = [\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_C = [\boldsymbol{o}_2]_C = \boldsymbol{o}\,,$$

tj. $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) \in M_0$.

(2) Nechť $\boldsymbol{u} \in M_0$. Pokud ukážeme, že $(\boldsymbol{u})_B \in \ker \mathcal{A}$, tak máme vyhráno, protože $\mathcal{B}((\boldsymbol{u})_B) = [(\boldsymbol{u})_B]_B = \boldsymbol{u}$ (zobrazení $[\ ]_B$ a $(\ )_B$ jsou vzájemně inverzní izomorfismy). Máme

$$[\mathcal{A}((\boldsymbol{u})_B)]_C = \mathbf{A} \cdot [(\boldsymbol{u})_B]_B = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}\,.$$

Aplikací izomorfismu $(\ )_C$ a předchozí rovnosti, dostaneme

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{u})_B) = \big([\mathcal{A}((\boldsymbol{u})_B)]_C\big)_C = (\boldsymbol{o})_C = \boldsymbol{o}_2\,,$$

tj. $(\boldsymbol{u})_B \in \ker \mathcal{A}$.

$\square$

Věta 7 *Nechť L_1, L_2, L_3 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ jsou lin. zobrazení. Dále nechť $(B), (C), (D)$ jsou postupně báze L_1, L_2, L_3, $\mathbf{A}$ je matice $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (C), a $\mathbf{B}$ je matice $\mathcal{B}$ vzhledem k bázím (C) a (D). Pak matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ je matice lin. zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ vzhledem k bázím (B) a (D).*

Důkaz: Musíme ukázat, že sloupce matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ jsou obrazy bázových vektorů z (B) vyjádřené v bázi (D) přes zobrazení $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Pak

$$[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i))]_D = \mathbf{B} \cdot [\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i)]_C = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B \,.$$

Protože $[\boldsymbol{b}_i]_B = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ je vektor samých nul, akorát na i-té pozici je 1. Dostaneme, že $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot [\boldsymbol{b}_i]_B$ není nic jiného než i-tý sloupec matice $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. $\square$

Věta 8 *Nechť L_1, L_2 jsou lin. prostory konečné dimenze, $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je izomorfismus a $\mathbf{A}$ je matice $\mathcal{A}$ vzhedem k bázím (B) a (C). Pak $\mathbf{A}^{-1}$ existuje a je maticí $\mathcal{A}^{-1}$ vzhledem k bázím (C) a (B).*

Důkaz: Když je $\mathcal{A}$ je izomorfimus, pak $\dim L_1 = \dim L_2 = n$ a $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$. Takže $\mathbf{A}$ je typu (n, n) a je regulární, protože $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} \mathcal{A} = \dim L_1 - \operatorname{def} \mathcal{A} = n$. Nechť $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$. Ukážeme, že i-tý sloupce matice $\mathbf{A}^{-1}$ je roven $[\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i)]_B$. Máme

$$\mathbf{A} \cdot [\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i)]_B = [\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i))]_C = [\boldsymbol{c}_i]_C \,.$$

Po vynásobení poslední rovnosti maticí $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme:

$$[\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{c}_i)]_B = \mathbf{A}^{-1} \cdot [\boldsymbol{c}_i]_C \,.$$

Protože $[\boldsymbol{c}_i]_C = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ je vektor samých nul, akorát na i-té pozici je 1. Dostaneme, že $(\mathbf{A}^{-1}) \cdot [\boldsymbol{c}_i]_C$ není nic jiného než i-tý sloupec matice $\mathbf{A}^{-1}$. $\square$

3 Transformace souřadnic

Věta 9 *Nechť L je lin. prostor konečné dimenze, $\mathcal{I}\colon L \to L$ je identické zobrazení a $(B), (C)$ jsou dvě báze L. Pak pro matici $\mathbf{I}$ lin. zobrazení $\mathcal{I}$ vzhledem k bázím (B) a (C) platí:*

$$[\boldsymbol{x}]_C = \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_B \,,$$

pro každý $\boldsymbol{x} \in L$.

Důkaz:

$$[\boldsymbol{x}]_C = [\mathcal{I}(\boldsymbol{x})]_C = \mathbf{I} \cdot [\boldsymbol{x}]_B \,.$$

$\square$

Matice $\mathbf{I}$ tedy přepočítává souřadnice z báze (B) do báze (C). Navíc $\mathbf{I}$ je typu (n, n), kde $n = \dim L$.

Definice 3 *Matice* $\mathbf{I}$ *z předchozí věty se nazývá matice přechodu od báze* (C) *k bázi* (B)*.*

Pořadí bází v definici matice přechodu je motivováno následujícím faktem. Nechť $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$. Pak i-tý sloupec matice $\mathbf{I}$ je $[\mathcal{I}(\boldsymbol{b}_i)]_C = [\boldsymbol{b}_i]_C$, tj. pokud známe bázi (C), pak sloupce matice $\mathbf{I}$ nám říkají, jak najít bázové vektory z (B).

Věta 10 *Nechť* L *je lin. prostor konečné dimenze* n*,* $\mathcal{I}\colon L \to L$ *je identické zobrazení a* $(B), (C)$ *jsou dvě báze* L*. Pak matice přechodu* $\mathbf{I}$ *od báze* (C) *k bázi* (B) *je regulární a matice* $\mathbf{I}^{-1}$ *je matice přechodu od báze* (B) *k bázi* (C)*.*

Důkaz: Protože $\mathcal{I}$ je izomorfismus, je matice $\mathbf{I}$ regulární. Navíc podle Věty 8 je $\mathbf{I}^{-1}$ maticí lin. zobrazení $\mathcal{I}^{-1}$ vzhledem k bázím (C) a (B). Protože $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}$, je matice $\mathbf{I}^{-1}$ maticí přechodu od báze (B) k bázi (C). $\square$