12. přednáška

Rostislav Horčík

5. února 2007

1 Eukleidovský prostor

V následujícím budeme pracovat s eukleidovským prostorem $\mathbb{E}_3$, kterých v jistém smyslu aproximuje náš třírozměrný prostor. Prostor $\mathbb{E}_3$ se sestává z bodů, mezi kterými jsme schopni měřit vzdálenost, každé dva body určují právě jednu přímku, mezi dvěmi přímkami, které se protínají v jednom bodě, můžeme měřit úhel. V prostoru $\mathbb{E}_3$ můžeme také zavést kartézskou souřadnou soustavu a všechny body popsat pomocí souřadnic v této souřadné soustavě. Teorie eukleidovských prostorů se obvykle staví na geometrických pojmech, nicméně v našem zkráceném přístupu rovnou ztotožníme body $\mathbb{E}_3$ s trojicemi souřadnic v nějaké kartézské souřadné soustavě.

Definice 1 *Eukleidovský prostor* $\mathbb{E}_3$ *je množina uspořádaných trojic reálných čísel. Prvek* $P = (x, y, z)$ *prostoru* $\mathbb{E}_3$ *se nazývá bod. Bod* $(0, 0, 0)$ *značíme* O.

Definice 2 *Nechť* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *a* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *jsou body* $\mathbb{E}_3$. *Pak definuje vektor* $\overrightarrow{AB}$ *jako uspořádanou trojici* $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \in \mathbb{R}^3$. *Vektor* $\overrightarrow{OA}$ *nazýváme rádiusvektorem bodu* A. *V případě, že nebudeme referovat u vektoru ke konkrétním bodům, budeme vektory značit malými písmeny* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \ldots$

Definice 3 *Nechť* $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{E}_3$ *a vektor* $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. *Pak* $A + \boldsymbol{v}$ *značí bod* $(a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$. *Dále nechť* $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{E}_3$. *Pak* $B - A$ *značí vektor* $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.

Je zřejmé, že námi definované vektory splňují následující vlastnosti:

1. $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{o}$ p.t.k. $A = B$,
2. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$,
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,
4. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = C - B$,
5. když $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ je vektor a A je bod, pak existuje právě jeden bod B t.ž. $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{AB}$, konkrétně je to bod $A + \boldsymbol{u}$.

Připomeňme, že na $\mathbb{R}^3$ můžeme definovat skalární součin jako $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Můžeme tedy mluvit o velikostech a úhlech mezi vektory. Dále vektory $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ tvoří uspořádanou ortonormální bázi.

Definice 4 *Nechť (B) a (C) jsou uspořádané báze $\mathbb{R}^3$. Pak (B) a (C) nazýváme souhlasně orientované pokud* $\det \mathbf{I} > 0$*, kde* $\mathbf{I}$ *je matice přechodu od báze (B) k bázi (C) a jinak nesouhlasně orientované.*

Věta 1 *Množinu uspořádaných bází na $\mathbb{R}^3$ lze rozdělit na dvě disjunktní části, které obsahují jen souhlasně orientované báze.*

DŮKAZ: Zvolme jednu uspořádanou bázi (B) a rozdělme množinu bází na část, kde jsou souhlasně orientované báze s B a na část, kde jsou nesouhlasně orientované. Ukážeme, že v obou částech jsou libovolné dvě usp. báze souhlasně orientované. Nechť (C) a (D) jsou usp. báze souhlasně orientované s (B). Pro matici přechodu $\mathbf{I}_1$ od (B) k (C) platí $\det \mathbf{I}_1 > 0$. Podobně $\det \mathbf{I}_2 > 0$, kde $\mathbf{I}_2$ je matice přechodu od (B) k (D). Matice přechodu od (C) k (D) je matice $\mathbf{I}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_2$. Protože $\det(\mathbf{I}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_2) = \det \mathbf{I}_1^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 = (\det \mathbf{I}_1)^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 > 0$, jsou (C) a (D) souhlasně orientované. Podobně pokud jsou (C) a (D) nesouhlasně orientované, pak $\det \mathbf{I}_1 < 0$ a $\det \mathbf{I}_2 < 0$. Takže opět platí $\det(\mathbf{I}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_2) = \det \mathbf{I}_1^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 = (\det \mathbf{I}_1)^{-1} \cdot \det \mathbf{I}_2 > 0$. □

Definice 5 *Orientovat libovolný lin. prostor konečné dimenze znamená prohlásit jednu jeho uspořádanou bázi (B) za kladně orientovanou. Uspořádaná báze (C) se pak nazývá kladně orientovaná, pokud je souhlasně orientovaná s (B) a záporně orientovaná, pokud nesouhlasně.*

Definice 6 *Vektorový součin $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení, které splňuje následující vlastnosti:*

- *Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LZ, pak $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$.*
- *Je-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LN, pak $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je určen následovně:*
  1. *$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}$ a $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{v}$,*
  2. *$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin \varphi$, kde φ je úhel mezi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$,*
  3. *$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ je kladně orientovaná báze.*

Pozorování 1 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ je kladně orientovaná ortonormální báze. Pak*

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{o}\,,$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}\,, \quad \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}\,, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\,, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}\,.$$

Věta 2 *Nechť $(B) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ je kladně orientovaná ortonormální báze a $[\boldsymbol{u}]_B = (u_1, u_2, u_3)$ a $[\boldsymbol{v}]_B = (v_1, v_2, v_3)$. Pak*

$$[\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]_B = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\,.$$

DŮKAZ: Pokud je $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LZ, pak všechny výše uvedené determinanty jsou nulové a výsledný vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ má nulové souřadnice, takže je v souladu s definicí nulový. Zbývá tedy ověřit vlastnosti 1 až 3 z definice vektorového součinu pro případ, že vektory u, v jsou lineárně nezávislé.

1. Ověříme $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{u}$. Dva vektory jsou kolmé, pokud jejich skalární součin je nulový.

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot u_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot u_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0\,.$$

   Podobně se ověří $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \perp \boldsymbol{v}$.

2.

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 = \\ &= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 = \\ &= |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \cos^2 \varphi = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \sin^2 \varphi\,. \end{aligned}$$

3. Protože $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je nenulový pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ LN a kolmý na oba vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ tvoří uspořádanou bázi. Matice přechodu od báze (B) k bázi $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ vypadá takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_2 & v_2 & -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_3 & v_3 & \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

   Rozvojem podle třetího sloupce dostaneme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2 > 0\,.$$

   Báze $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ je tedy kladně orientovaná.

$\square$

Výpočet vektorového součinu $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ si lze snadno zapamatovat následovně:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix},$$

kde determinant vypočítáme rozvojem podle posledního řádku.

Věta 3 *Vektorový součin splňuje následující vlastnosti:*

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$,
2. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$,
3. $(\alpha \boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \alpha(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \times (\alpha \boldsymbol{v})$,
4. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$,

5. $(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\times\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u}$.

Příklad

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v})\times(\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}) &= (2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{u}+(2\boldsymbol{u}-5\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{v}) = \\ &= (2\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}+(-5\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{u}+(2\boldsymbol{u})\times(3\boldsymbol{v})+(-5\boldsymbol{v})\times(3\boldsymbol{v}) = \\ &= 2(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u})-5(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})+6(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})-15(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}) = \\ &= 2\boldsymbol{o}-5(-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})+6(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})-15\boldsymbol{o}=11(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\,.\end{aligned}$$

Věta 4 *Nechť $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ je LN. Pak $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$ je rovna ploše rovnoběžníka určeného stranami $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.*

DŮKAZ: Platí $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\varphi$. Plocha rovnoběžníka je rovna součinu základny $|\boldsymbol{u}|$ a výšky, což je právě $|\boldsymbol{v}|\sin\varphi$. □

Definice 7 *Nechť $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^3$. Pak číslo $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ nazýváme smíšeným součinem vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ (v tomto pořadí).*

Věta 5 *Nechť $(B)=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ je kladně orientovaná ortonormální báze a $[\boldsymbol{u}]_B=(u_1,u_2,u_3)$, $[\boldsymbol{v}]_B=(v_1,v_2,v_3)$, $[\boldsymbol{w}]_B=(w_1,w_2,w_3)$. Pak*

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}\,.$$

DŮKAZ: Rozvojem determinantu podle 1.řádku dostaneme přímo skalární součin $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$. □

Věta 6 *Absolutní hodnota smíšeného součinu lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ je rovna objemu rovnobežnostěnu určeného svými stranami $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$.*

DŮKAZ: Velikost $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|$ je rovna ploše rovnoběžníka určeného vektory $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$, tj. plocha podstavy. Máme tedy

$$|\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})|=|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}||\boldsymbol{u}||\cos\varphi|=\text{základna}\cdot\text{výška}=\text{objem}\,.$$

Číslo $|\boldsymbol{u}||\cos\varphi|$ je rovno požadované výšce, protože se jedná o kolmý průmět vektoru $\boldsymbol{u}$ na vektor $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ a vektor $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$ je kolmý na základnu. □

2 Analytická geometrie

Příklad Nechť $A\in\mathbb{E}_3$ a $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ je nenulový. Pak

$$p=A+\langle\boldsymbol{v}\rangle=\{X\in\mathbb{E}_3\mid X=A+t\boldsymbol{v},\ t\in\mathbb{R}\}\,,$$

je přímka procházející bodem A se směrovým vektorem $\boldsymbol{v}$.

Příklad Nechť $A\in\mathbb{E}_3$ a $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}\subseteq\mathbb{R}^3$ je LN podmnožina. Pak

$$\varrho=A+\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\{X\in\mathbb{E}_3\mid X=A+t\boldsymbol{u}+s\boldsymbol{v},\ t,s\in\mathbb{R}\}\,,$$

je rovina procházející bodem A se směrovými vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$.