

13. přednáška

Rostislav Horčík

6. ledna 2007

1 Analytická geometrie

1.1 Přímký

Nechť $A \in \mathbb{E}_3$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový. Pak

$$p = A + \langle \mathbf{v} \rangle = \{X \in \mathbb{E}_3 \mid X = A + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\},$$

je přímka procházející bodem A se směrovým vektorem \mathbf{v} . Rovnici

$$X = A + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R},$$

říkáme bodová rovnice přímky p . Nechť $X = (x, y, z)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak po dosazení do bodové rovnice dostaneme tzv. parametrické rovnice přímky p :

$$\begin{aligned}x &= a_1 + tv_1, \\y &= a_2 + tv_2, \quad t \in \mathbb{R}. \\z &= a_3 + tv_3,\end{aligned}$$

Eliminujeme-li parametr t z parametrických rovnic dostaneme tzv. kanonickou rovnici přímky p :

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}.$$

Zlomky v kanonické rovnici je třeba chápat jen formálně, protože některé v_i může být nulové.

Příklad (Vzdálenost bodu od přímky) Nechť p je přímka s bodovou rovnicí $X = A + t\mathbf{u}$, $r \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{E}_3$. Spočtěme vzdálenost d bodu B od přímky p . Tato vzdálenost je rovna výšce rovnoběžníka určeného stranami \mathbf{u} a \overrightarrow{AB} . Zakladna má velikost $|\mathbf{u}|$. Platí tedy:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

1.2 Vzájemná poloha dvou přímek

Nechť p je přímka s bodovou rovnicí $X = A + t\mathbf{u}$, $r \in \mathbb{R}$ a q je přímka s bodovou rovnicí $Y = B + s\mathbf{v}$, $s \in \mathbb{R}$. Vzájemnou polohu přímek p, q rozlišíme podle následujících případů:

1. Je-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}$ LN posloupnost, pak p, q jsou mimoběžné.
2. Je-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}$ LZ posloupnost, pak p, q leží v jedné rovině.

- a) Je-li \mathbf{u}, \mathbf{v} LN posloupnost, pak p, q jsou různoběžné.
 b) Je-li \mathbf{u}, \mathbf{v} LZ posloupnost, pak p, q jsou rovnoběžné nebo splývají.

Podle toho, který případ nastane, se obvykle dopočítávají následující hodnoty:

Vzdálenost dvou mimoběžek d počítáme z objemu rovnoběžnostěnu určeného stranami $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}$, který se rovná součinu plochy jeho základny (tj. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$) a jeho výšky (což je hledaná vzdálenost d). Protože můžeme tento objem spočítat také pomocí smíšeného součinu jako $|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$, dostaneme:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžek d počítáme jako vzdálenost bodu ležící na jedné rovnoběžce od druhé rovnoběžky, tj. např.

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

Úhel φ mezi různoběžkami spočítáme pomocí úhlu ψ mezi vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} . Máme tedy

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Úhel φ pak určíme takto:

$$\varphi = \begin{cases} \psi & \text{jestliže } \psi \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ \pi - \psi & \text{jestliže } \psi \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Vzorec můžeme ještě zjednodušit. Pro $\psi \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ platí $\cos \varphi = \cos \psi = |\cos \psi|$, protože funkce \cos je na intervalu $\langle 0, \pi/2 \rangle$ nezáporná. Pro $\psi \in (\pi/2, \pi)$ máme $\cos \varphi = \cos(\pi - \psi) = \cos \pi \cos \psi + \sin \pi \sin \psi = -\cos \psi = |\cos \psi|$, protože funkce \cos je na intervalu $(\pi/2, \pi)$ záporná. V obou případech máme $\cos \varphi = |\cos \psi|$, takže dostaneme:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Souřadnice průsečíku různoběžek spočítáme jako společné řešení bodových rovnic přímk p a q , tj. $A + t\mathbf{u} = B + s\mathbf{v}$ pro neznámé parametry $t, s \in \mathbb{R}$. Tato rovnice vede na soustavu lineárních rovnic $t\mathbf{u} - s\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$.

1.3 Roviny

Nechť $A \in \mathbb{E}_3$ a $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ je LN podmnožina. Pak

$$\rho = A + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \{X \in \mathbb{E}_3 \mid X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, t, s \in \mathbb{R}\},$$

je rovina procházející bodem A se směrovými vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} . Podobně jako u přímky rovnice

$$X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, t, s \in \mathbb{R},$$

se říká bodová rovnice roviny ϱ . Nechť $X = (x, y, z)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak po dosazení do bodové rovnice dostaneme tzv. parametrické rovnice roviny ϱ :

$$\begin{aligned}x &= a_1 + tu_1 + sv_1, \\y &= a_2 + tu_2 + sv_2, \quad t, s \in \mathbb{R}. \\z &= a_3 + tu_3 + sv_3,\end{aligned}$$

Jinou možností jak popsat rovinu ϱ je pomocí normálového vektoru $\mathbf{n} = (a, b, c)$ (tj. libovolného nenulového vektoru, který je kolmý na rovinu ϱ) a bodu $A = (a_1, a_2, a_3)$, kterým rovina ϱ prochází. Rovina ϱ je pak množina všech bodů $X = (x, y, z)$, které splňují:

$$\overrightarrow{AX} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow (x - a_1, y - a_2, z - a_3) \cdot (a, b, c) = 0.$$

Pokud spočítáme skalární součin v poslední rovnici a označíme $d = -aa_1 - ba_2 - ca_3$ dostaneme tzv. skalární rovnici roviny ϱ :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Pokud máme zadanou bodovou rovnici roviny ϱ : $X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, $t, s \in \mathbb{R}$, můžeme přejít ke skalární rovnici takto. Jeden bod ležící v rovině ϱ odečteme přímo z bodové rovnice (je to bod A) a normálový vektor pak najdeme jako vektorový součin $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Existuje alternativní způsob, jak najít skalární rovnici roviny ϱ . Vektory \overrightarrow{AX} , \mathbf{u} , \mathbf{v} musí totiž ležet v rovině ϱ . Tudíž musí tvořit LZ posloupnost. Tzn. že determinant matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi vektorů \overrightarrow{AX} , \mathbf{u} , \mathbf{v} musí být nulový, tj.:

$$\begin{vmatrix}x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\u_1 & u_2 & u_3 \\v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} = 0.$$

Výpočtem tohoto determinantu dostaneme také skalární rovnici roviny ϱ , protože tento determinant je smíšený součin $\overrightarrow{AX} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je normálový vektor roviny ϱ .

Příklad (Vzdálenost bodu od roviny) Nechť ϱ je rovina s bodovou rovnicí $X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$, $r, s \in \mathbb{R}$ a $B \in \mathbb{E}_3$. Spočtíme vzdálenost d bodu B od roviny ϱ . Vzdálenost d spočítáme z objemu rovnoběžnostěny určeného stranami $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}$, který se rovná součinu plochy jeho základny (tj. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$) a jeho výšky (což je hledaná vzdálenost d). Protože můžeme tento objem spočítat také pomocí smíšeného součinu jako $|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$, dostaneme:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}.$$

Pokud je rovina ϱ zadána pomocí skalární rovnice $ax + by + cz + d = 0$ spočteme vzdálenost d takto. Nechť $\mathbf{n} = (a, b, c)$ a $B = (x_0, y_0, z_0)$. Nechť $A = (a_1, a_2, a_3) \in \varrho$. Pak $|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}| = |\overrightarrow{AB}| |\mathbf{n}| \cos \varphi$, kde φ je úhel mezi vektory \overrightarrow{AB} a \mathbf{n} . Navíc $|\overrightarrow{AB}| \cos \varphi = d$, protože

$$|\cos \varphi| = \begin{cases} \cos \varphi & \text{když } \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle, \\ \cos(\pi - \varphi) & \text{když } \varphi \in (\pi/2, \pi). \end{cases}$$

Takže

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(x_0 - a_1)a + (y_0 - a_2)b + (z_0 - a_3)c|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

protože $d = -aa_1 - ba_2 - ca_3$ pro každý bod $A = (a_1, a_2, a_3) \in \varrho$.

1.4 Vzájemná poloha přímky a roviny

Nechť p je přímka s bodovou rovnicí $X = A + t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$ a ϱ rovina s normálovým vektorem \mathbf{n} a procházející bodem B . Pak vzájemnou polohu p a ϱ rozlišíme podle následujících případů:

1. Je-li $\mathbf{u} \perp \mathbf{n}$ (tj. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$), pak nastávají tyto možnosti:
 - a) Je-li $\overrightarrow{AB} \perp \mathbf{n}$ (tj. $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0$), pak přímka p leží v rovině ϱ .
 - b) Je-li $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, pak je přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ .
2. Je-li $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, pak přímka p protíná rovinu ϱ v jediném bodě.

Vzdálenost rovnoběžné přímky od roviny (v případě 1b) zjistíme jako vzdálenost bodu A od roviny ϱ .

Průsečík přímky s rovinou (v případě 2) najdeme tak, že dosadíme do skalární rovnice roviny ϱ za x, y, z hodnoty z parametrických rovnic přímky p . Řešení nám pak dá hodnotu parametru t , který po dosazení zpět do parametrických rovnic přímky p , již určí souřadnice průsečíku. Výše popsany způsob hledání průsečíku je typický způsob, který se používá při řešení konkrétního příkladu. Nicméně pomocí našeho formalizmu můžeme také vyjádřit souřadnice průsečíku přímo i v obecném případě. Začneme se skalární rovnicí roviny ϱ , tj. $\overrightarrow{BX} \cdot \mathbf{n} = 0$, kde za X dosadíme z bodové rovnice přímky p . Dostaneme tedy:

$$0 = \overrightarrow{BX} \cdot \mathbf{n} = (X - B) \cdot \mathbf{n} = (A + t\mathbf{u} - B) \cdot \mathbf{n} = (\overrightarrow{BA} + t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n} + t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}).$$

Takže pro parametr t máme:

$$t = -\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} = -\frac{(-\overrightarrow{AB}) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}.$$

Dosazením zpět do bodové rovnice přímky p dostaneme pro průsečík P :

$$P = A + \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{u}.$$

Úhel α mezi přímkou a rovinou (v případě 2) spočítáme pomocí úhlu φ mezi přímkou p a libovolnou kolmicí na rovinu ϱ . Pak $\alpha = \pi/2 - \varphi$. Kolmice má směrový vektor \mathbf{n} , takže

$$\sin \alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) = \cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{n}|}.$$

1.5 Vzájemná poloha dvou rovin

Nechť ϱ, σ jsou roviny, ϱ prochází bodem A a $\mathbf{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor ϱ , a σ prochází bodem B a $\mathbf{m} = (e, f, g)$ je normálový vektor σ . Pak vzájemnou polohu ϱ, σ rozlišíme podle následujících případů:

1. Je-li \mathbf{n}, \mathbf{m} LN posloupnost, pak jsou ϱ, σ různoběžné.
2. Je-li \mathbf{n}, \mathbf{m} LZ posloupnost, pak nastávají tyto možnosti:
 - a) Pokud $B \in \varrho$, pak ϱ, σ splývají.

b) Pokud $B \notin \varrho$, pak jsou ϱ, σ rovnoběžné.

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin (v případě 2b) spočítáme jako vzdálenost bodu B od roviny ϱ .

Průsečnice dvou rovin (v případě 1) spočítáme jako společné řešení skalárních rovnic rovin ϱ a σ . Nechť $ax + by + cz + d = 0$ je skalární rovnice roviny ϱ a $ex + fy + gz + h = 0$ je skalární rovnice roviny σ . Pak rovnici průsečnice dostaneme jako řešení následující soustavy lineárních rovnic pro neznámé x, y, z :

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= -d, \\ ex + fy + gz &= -h. \end{aligned}$$

Úhel φ mezi dvěma různoběžnými rovinami spočítáme pomocí úhlu mezi libovolnými kolmicemi rovin ϱ a σ . Protože směrové vektory těchto rovin jsou normálové vektory \mathbf{n} a \mathbf{m} , dostaneme:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|}.$$