

## 3. přednáška

Rostislav Horčík

13. října 2006

### 1 Lineární prostory

**Definice 1** *Lineárním prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu  $L$ , na které je definováno sčítání  $+$  :  $L \times L \rightarrow L$  a násobení reálným číslem  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times L \rightarrow L$  a tyto operace splňují pro každé  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vlastnosti:*

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$  komutativita +
2.  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$  asociativita +
3.  $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{x}$  asociativita ·
4.  $\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}$  distributivita
5.  $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}$  distributivita
6.  $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$  neutrální prvek pro ·
7. existuje  $\mathbf{o} \in L$ , že pro každé  $\mathbf{x} \in L$  je  $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$  existence nulového prvku.

*Prvkům z množiny  $L$  říkáme vektory. Prvek  $\mathbf{o}$  se nazývá nulový vektor. Reálnému číslu ve výrazu  $\alpha \cdot \mathbf{x}$  říkáme skalár.*

**Příklad** „Středoškolské vektory v rovině“ tj. množina šipek vedoucích z počátku do libovolného bodu roviny tvoří lineární prostor, když definujeme operaci sčítání přes doplnění na rovnoběžník a násobení skalárem  $\alpha$  jako odpovídající prodloužení (zkrácení) šipky a v případě že  $\alpha < 0$  ještě navíc otočení šipky o 180 stupňů.

**Příklad** Necht  $F_X$  je množina všech zobrazení z množiny  $X$  do množiny reálných čísel  $\mathbb{R}$ . Pak  $F_X$  tvoří lineární prostor s operacemi  $+$  :  $F_X \times F_X \rightarrow F_X$  a násobení reálným číslem  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times F_X \rightarrow F_X$ . Z první přednášky víme, že všechny vlastnosti 1–6 z definice lineárního prostoru to splňuje. Konstatní zobrazení  $\bar{0} : X \rightarrow \mathbb{R}$  funguje jako nulový vektor, protože  $0 \cdot f = \bar{0}$ .

Rozmysleme si, že uspořádané  $n$ -tice reálných čísel můžeme chápat, jako zobrazení z množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$  do množiny reálných čísel. Např. uspořádanou pětici  $(3, 1, 2, -1, 7)$  můžeme chápat jako zobrazení  $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 1$ ,  $f(3) = 2$ ,  $f(4) = -1$  a  $f(5) = 7$ .

**Příklad** Množina uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  tvoří lineární prostor, pokud definujeme operace  $+$ ,  $\cdot$  takto:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$$\alpha \cdot (a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n).$$

Fakt, že to je lineární prostor plyne ze skutečnosti, že toto je vlastně jen speciální případ předchozího lin. prostoru  $F_X$ , kde  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ . Nulový vektor je v tomto případě uspořádaná  $n$ -tice  $(0, \dots, 0)$ .

**Věta 1** V každém lineárním prostoru  $L$  platí:

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in L$
2.  $\alpha \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. Je-li  $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}$  a  $\alpha \neq 0$ , pak  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ .

DŮKAZ:

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{o} \stackrel{7.}{=} \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \stackrel{6.}{=} 1 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \stackrel{5.}{=} (1 + 0) \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} \stackrel{6.}{=} \mathbf{x}$ .
2.  $\alpha \cdot \mathbf{o} \stackrel{7.}{=} \alpha \cdot (0 \cdot \mathbf{x}) \stackrel{3.}{=} (\alpha \cdot 0) \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} \stackrel{7.}{=} \mathbf{o}$ .
3.  $\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) \cdot \mathbf{x} \stackrel{3.}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ .

□

**Definice 2** Neprázdňá podmnožina  $M$  lineárního prostoru  $L$  se nazývá lineárním podprostorem prostoru  $L$ , pokud pro všechna  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$  platí:

1.  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$ ,
2.  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in M$ .

**Příklad** Množina  $\mathbb{R}[x]$  je lin. podprostor lin. prostoru  $F_{\mathbb{R}}$ , protože součet dvou polynomů je opět polynom a  $\alpha$ -násobek polynomu je také polynom.

**Příklad** Množina reálných polynomů stupně nejvýše  $n$  je lin. podprostor lin. prostoru  $\mathbb{R}[x]$ , protože  $\text{st}(f + g) \leq \max\{\text{st } f, \text{st } g\} \leq n$  a  $\text{st}(\alpha \cdot f) \leq \text{st } f \leq n$ .

**Příklad** Množina reálných polynomů stupně právě 3 není lin. podprostor lin. prostoru  $\mathbb{R}[x]$ , protože např.  $\text{st}(0 \cdot f) = \text{st } 0 = -1 \neq 3$ .

**Příklad** Množina  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$  je lin. podprostor lin. prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Nechť  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in M$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ukážeme, že  $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in M$  a  $(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in M$ .

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (2x_1 + y_1 - z_1) + (2x_2 + y_2 - z_2) = 0 + 0 = 0.$$

$$2(\alpha x_1) + (\alpha y_1) - (\alpha z_1) = \alpha(2x_1 + y_1 - z_1) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

**Příklad** Množina  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 3\}$  není lin. podprostor lin. prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Např.  $0 \cdot (x, y, z) = (0, 0, 0)$ , ale  $(0, 0, 0) \notin M$ , protože  $2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0 \neq 3$ .

**Věta 2** Nechť  $M, N \subseteq L$  jsou lin. podprostory lin. prostoru  $L$ . Pak

1.  $M \cap N$  je lineární podprostor  $L$ ,
2.  $M \cup N$  nemusí být lineární podprostor  $L$ .

DŮKAZ:

1. Nechť  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \cap N$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Z vlastnosti průniku máme  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  a  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$ . Protože  $M, N$  jsou lin. podprostory,  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M$  a  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in N$ . To ale znamená, že  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in M \cap N$ . Podobně  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in M$  a  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in N$ . Tudíž  $\alpha \cdot \mathbf{x} \in M \cap N$ .
2. Nechť  $M = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$  a  $N = \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \in \mathbb{R}\}$ . Pak  $M$  i  $N$  jsou zřejmě podprostory  $\mathbb{R}^2$ . Nicméně  $M \cup N$  není podprostor  $\mathbb{R}^2$ , protože např.  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin M \cup N$ .

□

## 2 Lineární závislost a nezávislost

**Definice 3** Nechť  $L$  je lineární prostor a  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in L$ . Lineární kombinací vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  rozumíme vektor:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n,$$

kde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Čísla  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se nazývají koeficienty lineární kombinace.

Pokud  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  nazýváme lineární kombinaci triviální. V opačném případě netriviální.

**Pozorování 1** Triviální lineární kombinace je vždy rovna nulovému vektoru.

**Definice 4** Konečnou posloupnost (skupinu) vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  nazýváme lineárně závislou (LZ), pokud existuje netriviální lineární kombinace vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , která je rovna nulovému vektoru. V opačném případě ji nazýváme lineárně nezávislou (LN).

Konečná posloupnost vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  je tedy LZ, pokud existují  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  alespoň jedno  $\alpha_i \neq 0$  a platí:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{o}. \quad (1)$$

Naopak  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  je LN, pokud jediná možnost jak splnit rovnici (1) je  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Příklad** Vektory  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  z lin. prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsou LN, protože

$$\begin{aligned} \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) &= \mathbf{o} \\ (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

**Příklad** Vektory  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 0, 2)$ ,  $(-1, 4, 0)$  z lin. prostoru  $\mathbb{R}^3$  jsou LZ, protože

$$\begin{aligned} \alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(1, 0, 2) + \alpha_3(-1, 4, 0) &= (0, 0, 0) \\ (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, 2\alpha_1 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Vyjádřeno s parametrem  $p \in \mathbb{R}$  máme  $\alpha_3 = p$ ,  $\alpha_2 = 3p$  a  $\alpha_1 = -2p$ . Existuje tedy i jiné řešení než jen samé nuly např. pro  $p = 1$  máme  $\alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_2 = 3$  a  $\alpha_1 = -2$  tj.

$$-2(1, 2, 3) + 3(1, 0, 2) + 1(-1, 4, 0) = (0, 0, 0).$$

**Věta 3** *Nechť  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  je konečná posloupnost vektorů lin. prostoru  $L$ . Pak*

1. *Lineární závislost či nezávislost se nezmění při změně pořadí vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .*
2. *Jestliže  $\mathbf{x}_i = \mathbf{o}$  pro nějaké  $i \in \{1, \dots, n\}$ , pak je  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  LZ.*
3. *Jestliže  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$  pro  $i \neq j$ , pak je  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  LZ.*
4. *Jestliže je  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  LZ a  $\mathbf{x}_{n+1} \in L$ , pak je  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}$  LZ.*
5. *Jestliže je  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  LN, pak je  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  LN.*
6. *Konečná posloupnost  $\mathbf{x}_1$  je LN p.t.k.  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{o}$ .*

DŮKAZ:

1. Plyne z komutativity sčítání vektorů.
2. Vzhledem k předchozí vlastnosti můžeme předpokládat bez újmy na obecnosti, že  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$ . Pak

$$1 \cdot \mathbf{o} + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_n = \mathbf{o}$$

3. Opět můžeme předpokládat, že  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ . Pak

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + (-1) \cdot \mathbf{x}_2 + 0 \cdot \mathbf{x}_3 + \dots + 0 \cdot \mathbf{x}_n = (1 - 1) \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$$

4. Pokud  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  jsou koeficienty netriviální lin. kombinace vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , pak

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n + 0 \cdot \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$$

5. Sporem: předpokládejme, že  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$  je LZ. Pak podle předchozího tvrzení musí být i  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  LZ, což je spor s předpokladem tvrzení.
6. Obě implikace dokážeme nepřímo. ( $\Rightarrow$ ) Pokud  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$  pak  $\mathbf{x}_1$  je LZ podle 2. tvrzení. ( $\Leftarrow$ ) Pokud  $\mathbf{x}_1$  je LZ, pak  $\alpha \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$  pro nějaké  $\alpha \neq 0$ . Takže podle Věty 1 máme  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$ .

□

**Věta 4** *Nechť  $n \geq 2$ . Konečná posloupnost vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  je LZ p.t.k.  $\exists r \in \{1, \dots, n\}$  t.ž.  $\mathbf{x}_r$  je roven lineární kombinaci ostatních vektorů.*

DŮKAZ: ( $\Rightarrow$ ) Pokud  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  je LZ, pak existují  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  alespoň jedno  $\alpha_r \neq 0$  t.ž.

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{x}_r + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{o}.$$

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{x}_r + (-\alpha_r) \mathbf{x}_r + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = -\alpha_r \mathbf{x}_r.$$

$$\sum_{i=1, i \neq r}^n \alpha_i \mathbf{x}_i = -\alpha_r \mathbf{x}_r.$$

$$\sum_{i=1, i \neq r}^n \frac{\alpha_i}{-\alpha_r} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_r.$$

( $\Leftarrow$ ) Předpokládáme tedy, že

$$\mathbf{x}_r = \sum_{i=1, i \neq r}^n \beta_i \mathbf{x}_i.$$

$$\sum_{i=1, i \neq r}^n \beta_i \mathbf{x}_i + (-1) \mathbf{x}_r = \mathbf{o}.$$

Což je netriviální lineární kombinace, protože koeficient u  $\mathbf{x}_r$  je  $-1$ . □