7. přednáška

Rostislav Horčík

9. listopadu 2006

1 Determinanty a inverzní matice

Definice 1 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice typu* (n, n), $n \geq 2$. *Subdeterminantem* A_{ij} *matice* $\mathbf{A}$ *příslušným pozici* (i, j) *nazýváme determinant matice, která vznikne z* $\mathbf{A}$ *vypuštěním* i*-tého řádku a* j*-tého sloupce. Doplňkem* D_{ij} *nazýváme číslo* $D_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.

Věta 1 *Nechť* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *je matice typu* (n, n), $n \geq 2$. *Pak pro každé* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *platí*

$$\det \mathbf{A} = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \cdots + a_{in} D_{in} \,.$$

Navíc pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$, *máme*

$$a_{i1} D_{j1} + a_{i2} D_{j2} + \cdots + a_{in} D_{jn} = 0 \,.$$

Příklad

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot D_{23} = 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot D_{21} =$$

$$= -12 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12 \cdot (-2 - 6) = -96$$

Věta 2 *Nechť* $\mathbf{A}$ *je matice typu* (n, n). *Pak* $\mathbf{A}$ *je regulární p.t.k.* $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Důkaz: Předpokládejme, že $\det \mathbf{A} = 0$ a $\mathbf{A}$ je regulární (tj. $\mathbf{A}^{-1}$ existuje). Pak

$$1 = \det \mathbf{E} = \det (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 0 \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 0 \,,$$

což je spor.

Předpokládejme, že $\det \mathbf{A} \neq 0$. Pak ukážeme, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (D_{ij})^T \,,$$

kde $(D_{ij})^T$ je transponovaná matice všech doplňků matice $\mathbf{A}$. Označme $\mathbf{B} = (D_{ij})^T$ a vypočteme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = (c_{ij})$. Pak

$$c_{ij} = a_{i1} D_{j1} + a_{i2} D_{j2} + \cdots + a_{in} D_{jn} = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{pro } i = j \,, \\ 0 & \text{pro } i \neq j \,. \end{cases}$$

Takže $\mathbf{C} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}$. Podobně se ukáže, že $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}$. $\square$

Příklad Nechť $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je obecná matice typu $(2,2)$. Pak $\det \mathbf{A} = ad - bc$. Pokud $ad - bc \neq 0$, potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\,(D_{ij})^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$