9. přednáška

Rostislav Horčík

23. listopadu 2006

1 Lineární prostory konečné dimenze

Definice 1 *Nechť L je lineární prostor konečné dimenze, M a N jsou jeho podprostory. Množinu $\langle M \cup N \rangle$ nazýváme spojením podprostorů M a N a značíme $M \vee N$.*

Spojení podprostorů $M \vee N$ je nejmenší lineární podprostor lin. prostoru L, který obsahuje M i N.

Věta 1 *Nechť L je lineární prostor konečné dimenze, M a N jsou jeho podprostory. Pak*

$$\dim M + \dim N = \dim (M \cap N) + \dim (M \vee N) .$$

2 Lineární zobrazení

Definice 2 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je zobrazení a $M \subseteq L_1$. Pak definujeme*

$$\mathcal{A}(M) = \{y \in L_2 \mid (\exists x \in M)(\mathcal{A}(x) = y)\} .$$

Říkáme, že zobrazení $\mathcal{A}$ je „na“, pokud $\mathcal{A}(L_1) = L_2$. Říkáme, že zobrazení $\mathcal{A}$ je „prosté“, pokud pro všechny $x_1, x_2 \in L_1$ t.ž. $x_1 \neq x_2$ platí $\mathcal{A}(x_1) \neq \mathcal{A}(x_2)$.

Definice 3 *Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory a $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je zobrazení. Zobrazení $\mathcal{A}$ nazýváme lineární, pokud pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$,
2. $\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$.

Ekvivalentně se dá pojem lineárního zobrazení zavést tak, že řekneme, že je to takové zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$, které pro všechna $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňuje:

$$\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x} + \beta \cdot \boldsymbol{y}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \beta \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) .$$

Pozorování 1 *Pro lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ platí $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \boldsymbol{o}_2$, kde $\boldsymbol{o}_1$ je nulový vektor L_1 a $\boldsymbol{o}_2$ nulový vektor L_2.*

Důkaz: Máme $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \mathcal{A}(0 \cdot \boldsymbol{x}) = 0 \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2$. $\square$

Příklad Nechť $\mathcal{A}_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované tak, že vektoru $\boldsymbol{x}$ přiřadí vektor otočený podle počátku o úhel φ. Pak $\mathcal{A}_\varphi$ je lineární zobrazení.

Příklad Nechť L_1 je lin. prostor všech diferencovatelných funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a L_2 je lin. prostor všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Pak zobrazení $\mathcal{D}\colon L_1 \to L_2$ definované vztahem $\mathcal{D}(f) = f'$ je lineární zobrazení, protože

$$\mathcal{D}(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)\,, \quad \mathcal{D}(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f' = \alpha \cdot \mathcal{D}(f)\,.$$

Definice 4 *Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory, $\boldsymbol{o}_2$ je nulový vektor v L_2 a $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množinu*

$$\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in L_1 \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}_2\}$$

nazýváme jádrem lineárního zobrazení $\mathcal{A}$.

Věta 2 *Jádro lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ tvoří lineární podprostor lin. prostoru L_1.*

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \ker \mathcal{A}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}_2 + \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2\,.$$

Tzn. že $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \ker \mathcal{A}$. Podobně

$$\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2\,,$$

tj. $\alpha \cdot \boldsymbol{x} \in \ker \mathcal{A}$. □

Věta 3 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množina $\mathcal{A}(L_1)$ tvoří lineární podprostor lin. prostoru L_2.*

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{A}(L_1)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existují $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_1$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$ a $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$. Takže $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)$, tj. $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in \mathcal{A}(L_1)$. Podobně $\alpha \cdot \boldsymbol{y}_1 = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) = \mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}_1)$, tj. $\alpha \cdot \boldsymbol{y}_1 \in \mathcal{A}(L_1)$. □

Definice 5 *Defekt lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je definován jako* $\dim(\ker \mathcal{A})$ *a hodnost lineárního zobrazení $\mathcal{A}$ je definována jako* $\dim \mathcal{A}(L_1)$*. Defekt $\mathcal{A}$ značíme* $\operatorname{def} \mathcal{A}$ *a hodnost $\mathcal{A}$ značíme* $\operatorname{hod} \mathcal{A}$*.*

Věta 4 *Nechť L_1, L_2 jsou lineární prostory, $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je usp. báze L_1 a $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n \in L_2$. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Navíc*

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n\,, \tag{1}$$

kde $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ v bázi (B).

Důkaz: (1) Existence: ukážeme, že zobrazení definované vztahem (1) je lineární. Nechť $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in L_1$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jsou souřadnice $\boldsymbol{x}_1$ v (B) a $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ souřadnice $\boldsymbol{x}_2$ v (B). Pak

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n + \beta_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \boldsymbol{b}_n = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \boldsymbol{b}_n \,,$$

$$\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1 = \gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n) = (\gamma\alpha_1) \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) \cdot \boldsymbol{b}_n \,.$$

Tzn. že souřadnice $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ v (B) jsou $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ a souřadnice $\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1$ v (B) jsou $(\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n)$. Takže

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot \boldsymbol{y}_n = \\ &= \alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n + \beta_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \beta_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2) \,, \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(\gamma \cdot \boldsymbol{x}_1) = (\gamma\alpha_1) \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + (\gamma\alpha_n) \cdot \boldsymbol{y}_n = \gamma \cdot (\alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n) = \gamma \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) \,.$$

(2) Jednoznačnost: předpokládejme, že existuje lineární zobrazení $\mathcal{B}\colon L_1 \to L_2$ t.ž. $\mathcal{B}(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{y}_i$ pro všechna i a $\boldsymbol{x} \in L_1$. Vektor $\boldsymbol{x}$ má nějaké souřadnice $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ v (B). Pak

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\alpha_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{b}_n) = \alpha_1 \cdot \mathcal{B}(\boldsymbol{b}_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \mathcal{B}(\boldsymbol{b}_n) = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{y}_n = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \,.$$

□

Příklad Vezměme příklad lin. zobrazení $\mathcal{A}_\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a standardní bázi $(B) = ((1,0),(0,1))$. Je jednoduché ověřit, že $\mathcal{A}_\varphi(1,0) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a $\mathcal{A}_\varphi(0,1) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Pokud nás nyní zajímá obraz libovolného vektoru $(x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)$, pak podle předchozí věty máme:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varphi(x,y) &= x \cdot \mathcal{A}_\varphi(1,0) + y \cdot \mathcal{A}_\varphi(0,1) = \\ &= x \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) + y \cdot (-\sin\varphi, \cos\varphi) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi) \,. \end{aligned}$$

Pozorování 2 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ je LZ posloupnost v L_1. Pak i $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ je LZ.*

Důkaz: Protože existuje netriviální lin. kombinace vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ t.ž.

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}_1 \,,$$

dostaneme

$$\alpha_1 \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) = \mathcal{A}(\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n) = \mathcal{A}(\boldsymbol{o}_1) = \boldsymbol{o}_2 \,.$$

□

Věta 5 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *$\mathcal{A}$ je prosté.*
2. $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$.
3. *Je-li $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ LN posloupnost v L_1, pak i $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \ldots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ je LN.*

DŮKAZ:

(1⇒2) Je-li $\mathcal{A}$ prosté, pak $\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}_1\}$, tj. $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$.

(2⇒3) Pokud $\operatorname{def} \mathcal{A} = 0$, pak $\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{o}_1\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n)$ je LN. Řešme tedy rovnici:

$$\alpha_1 \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}_2 \,.$$

Z linearity $\mathcal{A}$ dostaneme:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{o}_2 \,,$$

tj. $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n \in \ker \mathcal{A}$. Takže $\alpha_1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{o}_1$. Protože $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ je LN, musí platit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(3⇒1) Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ t.ž. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$. Pak $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}_1$, tj. $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ je LN. Proto $\boldsymbol{o}_2 \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$. Takže $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \neq \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$.

□

Definice 6 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ jsou zobrazení. Symbolem $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}\colon L_1 \to L_3$ označujeme složené zobrazení, které je definováno $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}))$ pro všechny $\boldsymbol{x} \in L_1$.*

Věta 6 *Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ a $\mathcal{B}\colon L_2 \to L_3$ jsou lineární zobrazení. Pak i $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ je lineární.*

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned}(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = \\ = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})) + \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) + (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{y}) \,,\end{aligned}$$

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{x})) = \mathcal{B}(\alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{x})) = \alpha \cdot \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x})) = \alpha \cdot (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\boldsymbol{x}) \,.$$

□

Definice 7 *Identické zobrazení $\mathcal{I}\colon L \to L$ je definováno $\mathcal{I}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.*

Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je prosté zobrazení na L_2. Pak inverzní zobrazení $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$ je takové zobrazení, které splňuje $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{I}$.

Zobrazení $\mathcal{A}^{-1}\colon L_2 \to L_1$ existuje právě jedno, je prosté a na.

Věta 7 *Je-li prosté zobrazení $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ na L_2 lineární, pak $\mathcal{A}^{-1}$ je také lineární.*

DŮKAZ: Nechť $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L_2$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{a} \in L_1$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{x}$ a právě jeden vektor $\boldsymbol{b} \in L_1$ t.ž. $\mathcal{A}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}$. Takže $\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ a $\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}$. Navíc $\mathcal{A}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{a}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Takže

$$\mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{y}) \,.$$

Nakonec $\mathcal{A}(\alpha \cdot \boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \mathcal{A}(\boldsymbol{a}) = \alpha \cdot \boldsymbol{x}$. Takže

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \mathcal{A}^{-1}(\boldsymbol{x}) \,.$$

□