A

1. a) (3 BODY) Definujte pojem kořene polynomu. Nechť $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ je polynom s celočíselnými koeficienty. Může být číslo $\frac{2}{3}$ jeho kořenem, když víme, že $a_2 = 1$? V případě, že ano, napište příklad takového polynomu. V případě, že ne, napište proč ne.

Odpoveď: Nechť f je nenulový polynom. Pak číslo c nazýváme kořenem polynomu f, pokud $f(c) = 0$ (1 bod). Pro racionální kořen $\frac{r}{s}$ polynomu s celočíselnými koeficienty platí, že r dělí a_0 a s dělí a_n. V našem případě tedy s dělí 1, takže všechny racionální kořeny musí být celočíselné (2 body).

b) (3 BODY) Rozložte na součin kořenových činitelů a uveďte násobnosti jednotlivých kořenů.

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 9\,.$$

Odpoveď:

$$f(x) = (x+1)(x-3)\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \qquad (2 \text{ body})\,.$$

Násobnosti jsou všechny jedna (1 bod).

2. a) (4 BODY) Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou čtvercové matice typu (n, n). Jak lze vyjádřit $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ pomocí determinantů $\det \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{B}$. Použijte tento vztah mezi determinanty a vyjádřete determinant matice $\mathbf{C}^{-1}$ pomocí $\det \mathbf{C}$ pro regulární matici $\mathbf{C}$.

Odpoveď: Platí $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$ (1 bod). Dále

$$1 = \det \mathbf{E} = \det(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1}) = \det \mathbf{C} \cdot \det \mathbf{C}^{-1}\,.$$

Takže $\det \mathbf{C}^{-1} = 1/\det \mathbf{C}$ (3 body).

b) (4 BODY) Spočtěte determinant dané matice, kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Určete pro která p existuje inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ a spočtete $\det \mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & p \\ p & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ p & 2 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Odpoveď: Rozvojem podle 3. sloupce dostaneme $\det \mathbf{A} = (x+1)(3x+2)$ (2 body). Inverzní matice tedy existuje pro $p \neq -1, -\frac{2}{3}$ (1 bod). Navíc $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(x+1)(3x+2)}$ (1 bod).

3. a) (3 BODY) Definujte pojem báze lineárního prostoru. Nechť L je lineární prostor a $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ je nějaká jeho uspořádaná báze. Jaké bude mít souřadnice vektor $\boldsymbol{x} \in L$ v bázi $(C) = (\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, když víme, že jeho souřadnice v bázi (B) jsou $(4, 2, 5)$?

Odpoveď: Nechť L je lineární prostor a $B \subseteq L$. Pak B se nazývá báze, pokud $\langle B \rangle = L$ a B je lineárně nezávislá (2 body). Vektor $\boldsymbol{x}$ bude mít v bázi (C) souřadnice $(5, 4, 2)$ (1 bod).

b) (3 BODY) V $\mathbb{R}^3$ je dána báze $(B) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$, v níž má vektor $\boldsymbol{x}$ souřadnice $(-4, 5, -1)$. Vypočtěte souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ v bázi $(C) = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$, kde $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2 = 2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3, c_3 = 2\boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{b}_1$.

Odpoveď: Souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ v bázi (C) jsou $(-1, 3, -2)$ (3 body).

B

1. a) (3 BODY) Definujte pojem inverzní matice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Napište alespoň dvě ekvivalentní podmínky existence $\mathbf{A}^{-1}$.

Odpoveď: Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (n, n). Matici $\mathbf{B}$ typu (n, n) nazýváme inverzní maticí k matici $\mathbf{A}$, pokud splňuje $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (1 bod). Ekvivalentní podmínky existence $\mathbf{A}^{-1}$: 1. $\operatorname{hod} \mathbf{A} = n$, 2. $\det \mathbf{A} \neq 0$, 3. $\mathbf{A} \sim \mathbf{E}$, 4. řádky matice $\mathbf{A}$ tvoří lineárně nezávislou podmnožinu $\mathbb{R}^n$. Za každou podmínku 1 bod.

b) (3 BODY) Nalezněte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{XA} + \mathbf{A} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Odpoveď: $\det \mathbf{A} = -1 \neq 0$ takže $\mathbf{A}$ je regulární. Pak $\mathbf{X} = (\mathbf{B} - \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}$ (1 bod).

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 body)}.$$

2. a) (4 BODY) Napište definici lineárního obalu. Nechť L je lineární prostor a $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\} \subseteq L$ je lineárně nezávislá podmnožina L. Jaká bude dimenze lineárního obalu $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \rangle$?

Odpoveď: Nechť L je lineární prostor a $M \subseteq L$. Linerní obal $\langle M \rangle$ je množina všech lineárních kombinací prvků z M, tj. $\langle M \rangle = \{\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdot + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \mid n \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in L,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$ (2 body). Protože platí věta, že je-li $\boldsymbol{x} \in \langle M \rangle$ pak $\langle M \rangle = \langle M \cup \{\boldsymbol{x}\} \rangle$, dostaneme $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \rangle$, tj. $\dim \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} \rangle = \dim \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 2$ (2 body).

b) (4 BODY) V $\mathbb{R}^4$ jsou dány vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Nechť M je lineární obal vektorů $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ (tj. $M = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$) a N je lineární obal vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (tj. $N = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$). Najděte dimenzi a nějakou bázi $M \cap N$.

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{a} = (1,1,1,2) & \qquad \boldsymbol{u} = (1,1,5,2) \\ \boldsymbol{b} = (2,3,4,6) & \qquad \boldsymbol{v} = (0,-1,2,-2) \end{array}$$

Odpoveď: $M \cap N = \langle (-1,-2,-3,-4) \rangle$ (2 body), tj. báze je např. $\{(-1,-2,-3,-4)\}$ (1 bod) a $\dim M \cap N = 1$ (1 bod).

3. a) (3 BODY) Nechť $\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) a $\boldsymbol{b}$ je nenulový vektor z $\mathbb{R}^n$. Který z následujících vektorů: $\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$, $2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ bude patřit do množiny řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, když víme, že $\boldsymbol{u}$ je řešením této soustavy a $\boldsymbol{v}$ je řešením její přidružené homogenní soustavy.

Odpoveď: Máme $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ a $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. Takže $\mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}) = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} - 2\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} - 2 \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}$, tj. $\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$ je řešení. Dále $\mathbf{A} \cdot (2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u} + \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = 2 \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = 2 \cdot \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}$, tj. $2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ není řešení (3 body).

b) (3 BODY) Nechť $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Vyřešte soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & p & -2 \\ p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Odpoveď: $\det \mathbf{A} = -(p-3)(p+1)$ (1 bod). Pro $p \neq 3, -1$ je jediné řešení $\left(\frac{2p+3}{(p-3)(p+1)}, -\frac{p+6}{(p-3)(p+1)}, -\frac{p^2+p-3}{(p-3)(p+1)}\right)$ (2 body). Pro $p = 3$ a $p = -1$ nemá řešení (1 bod).