A

1. a) (3 BODY) Definujte pojem násobnosti kořenu polynomu. Nechť $f(x)$ je reálný polynom pátého stupně. Může být číslo $1+i$ jeho třínásobným kořenem? Pokud ano, napište příklad takového polynomu. Pokud ne, zdůvodněte proč.

Odpoveď: Nechť c je kořen polynomu $f(x)$. Pak maximální $k \in \mathbb{N}$ takové, že $(x-c)^k$ dělí f, nazýváme násobností kořene c (1 bod). Pokud $1+i$ je třínásobný kořen polynomu f, pak také $1-i$ musí být třínásobný kořen f. Protože součet násobností kořenů je roven stupni polynomu, musel by být polynom f stupně alespoň $6 = 3+3$. Polynom f ale má stupeň 5. Takže to nejde (2 body).

b) (3 BODY) Rozložte na součin kořenových činitelů, když víte, že $1-i$ je kořen.

$$f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12\,.$$

Odpoveď: Když $1-i$ je kořen, musí být i $1+i$ kořen (1 bod).

$$f(x) = (x-2)(x+3)(x-1+i)(x-1-i) \qquad (2\text{ body})\,.$$

2. a) (3 BODY) Definujte pojem regulární matice. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice. Bude matice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T$ také regulární?

Odpoveď: Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pak $\mathbf{A}$ se nazývá regulární, pokud existuje $\mathbf{A}^{-1}$ (1 bod). $\mathbf{A}$ je regulární matice právě tehdy, když $\det\mathbf{A} \neq 0$. Protože $\det\mathbf{A}^T = \det\mathbf{A}$, je $\mathbf{A}^T$ také regulární. Nakonec podle věty, že součin regulárních matic je regulární matice, dostaneme že $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T$ je také regulární (2 body).

b) (3 BODY) Určete pro která $a \in \mathbb{R}$ existuje matici $\mathbf{A}^{-1}$ a vypočtěte jí.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Odpoveď: $\det\mathbf{A} = (a-1)(a+4)$. Takže $\mathbf{A}^{-1}$ existuje pro $a \neq 1, -4$ (1 bod).

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+4)}\begin{pmatrix} -2 & a+2 & a-2 \\ a+1 & -3 & 2a-1 \\ a-1 & a-1 & 1-a^2 \end{pmatrix} \qquad (2\text{ body})\,.$$

3. a) (4 BODY) Definujte pojem defektu lineárního zobrazení. Nechť $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení. Jaký maximální defekt může zobrazení $\mathcal{A}$ mít? Popište jak by vypadalo zobrazení s tímto maximálním defektem.

Odpoveď: Defekt lineárního zobrazení je dimenze jeho jádra (1 bod). Protože $5 = \dim\mathbb{R}^5 = \operatorname{hod}\mathcal{A} + \operatorname{def}\mathcal{A}$, máme $\operatorname{def}\mathcal{A} \leq 5$ (1 bod). Pro zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, jehož defekt by byl 5, musí platit $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ pro všechny $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5$ (2 body).

b) (4 BODY) Najděte defekt lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, když víte, že $\mathcal{A}(1,1,1) = (-1,-2,2)$, $\mathcal{A}(0,1,1) = (2,-1,2)$ a $\mathcal{A}(0,0,-1) = (3,1,0)$. Určete také, jestli je $\mathcal{A}$ prosté.

Odpoveď: $\ker\mathcal{A} = \langle(1,0,-1)\rangle$ (3 body). Protože $\operatorname{def}\mathcal{A} = \dim\ker\mathcal{A} = 1 \neq 0$, není $\mathcal{A}$ prosté (1 bod).

B

1. a) (3 BODY) Definujte pojem hodnosti matice. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu $(5,5)$. Jaká je hodnost matice $\mathbf{A}$, když víme, že $\det\mathbf{A}^T = 3$?

Odpoveď: Hodnost matice je dimenze lineárního obalu řádků matice (1 bod). Protože $\det\mathbf{A}^T = \det\mathbf{A}$, dostaneme $\det\mathbf{A} = 3 \neq 0$. Takže $\mathbf{A}$ je regulární. Navíc podle věty, že čtvercová matice je regulární právě tehdy když má hodnost rovnu počtu svých řádků, dostaneme $\operatorname{hod}\mathbf{A} = 5$ (2 body).

b) (3 BODY) Nalezněte všechna řešení maticové rovnice $\mathbf{AX} - \mathbf{X} = \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odpoveď: $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{B}$. $\det \mathbf{A} - \mathbf{E} = 0$ nelze počítat pomocí inverzní matice. Pomocí Gaussovy eliminační metody dostaneme:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1-p & 1-t \\ -1+p & 1+t \\ p & t \end{pmatrix}, \; p, t \in \mathbb{R} \qquad \text{(3 body)}.$$

2. a) (3 BODY) Napište definici jádra lineárního zobrazení. Nechť $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Je zobrazení $\mathcal{A}$ prosté, když víme, že $\operatorname{hod} \mathcal{A} = 3$?

Odpoveď: Nechť $\mathcal{A}\colon L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Pak jádrem $\mathcal{A}$ nazýváme množinu $\ker \mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in L_1 \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$ (1 bod). Protože $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \operatorname{hod} \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A} = 3 + \operatorname{def} \mathcal{A}$, máme $\operatorname{def} \mathcal{A} = 1$. Protože lineární zobrazení je prosté právě tehdy, když jeho defekt je nula, dostaneme, že $\mathcal{A}$ není prosté (2 body).

b) (3 BODY) Najděte dimenzi a nějakou bázi jádra lineárního zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definovaného vztahem

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 3x_3 + x_4, -x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4).$$

Je zobrazení $\mathcal{A}$ prosté?

Odpoveď: $\ker \mathcal{A} = \langle (2,1,0,-2), (4,0,1,-1) \rangle$, tj. $\dim \ker \mathcal{A} = 2$ a báze je např. $\{(2,1,0,-2), (4,0,1,-1)\}$ (2 body). Protože $\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim \ker \mathcal{A} = 2 \neq 0$, není $\mathcal{A}$ prosté (1 bod).

3. a) (4 BODY) Zformulujte Frobeniovu větu. Nechť $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je soustava lineárních rovnic, kde $\mathbf{A}$ je matice typu $(5,3)$. Kolik je hodnost matice rozšířené $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$, když víme, že soustava nemá řešení a $\operatorname{hod} \mathbf{A} = 3$?

Odpoveď: Soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, když $\operatorname{hod} \mathbf{A} = \operatorname{hod} (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$ (2 body). Z Frobeniovy věty víme, že když $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení, pak $3 = \operatorname{hod} \mathbf{A} \neq \operatorname{hod} (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$. Matice $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$ je typu $(5,4)$. Protože hodnost matice je menší než minimum z počtu řádků a sloupců, máme $\operatorname{hod} (\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b}) \leq 4$. Hodnost matice $(\mathbf{A} \mid \boldsymbol{b})$ tedy musí být 4, protože přidáním jednoho sloupce se hodnost může akorát zvětšit (2 body).

b) (4 BODY) Nechť $p \in \mathbb{R}$ je parametr. Pro která p má soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$: 1) právě jedno řešení, 2) nekonečně mnoho řešení, 3) žádné řešení? V případě 2) tyto řešení vypočtěte.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & p-3 \\ 1 & 0 & p \\ p-1 & -3 & 3p \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2p \end{pmatrix}.$$

Odpoveď: $\det \mathbf{A} = 3(x-3)(x-1)$. 1) soustava má právě jedno řešení pro $p \neq 1, 3$ (1 bod). 2) pro $p = 1$ máme nakonečně mnoho řešení $(-1, \frac{2}{3}, 0) + \langle (-1, 1, 1) \rangle$ (2 body). 3) pro $p = 3$ nemá řešení (1 bod).