Residuované svazy: algebry pro substrukturální logiky

Rostislav Horčík

Ústav informatiky, AVČR

Logický seminář, FF UK, 31.3.2008

Osnova

1. Úvod
2. Gentzenovský kalkul pro nejslabší substrukturální logiku FL
3. Residuované svazy a FL-algebry
4. Rozšíření FL a algebraizovatelnost

Substrukturální logiky

- Logiky, kde nefungují některá (nebo všechna) strukturální odvozovací pravidla.
- Vznikají zejména vynecháním některých strukturálních pravidel z gentzenovského kalkulu pro intuicionistickou nebo klasickou logiku.
- Poskytují jednotný sjednocující rámec pro mnoho neklasických logik (lineární, relevanční, fuzzy).
- Název vznikl roku 1990 na konferenci “Logics with restricted structural rules” (Došen).

Gentzenovský kalkul LJ pro intuicionistickou logiku

- Iniciální sekvent:

$$\alpha \Rightarrow \alpha$$

- Pravidlo řezu:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Sigma, \alpha, \Pi \Rightarrow \delta}{\Sigma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \delta} \text{ (cut)}$$

- Pravidla pro konjunkci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta} \; (\Rightarrow\wedge)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Sigma \Rightarrow \delta} \; (\wedge 1\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Sigma \Rightarrow \delta} \; (\wedge 2\Rightarrow)$$

- Pravidla pro disjunkci:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta \qquad \Gamma, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\Rightarrow\vee)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\vee 1\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}\ (\vee 2\Rightarrow)$$

- Pravidla pro implikaci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \alpha \to \beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\to\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta}\ (\Rightarrow\to)$$

- Pravidla pro negaci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\neg\alpha, \Gamma \Rightarrow}\ (\neg\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha}\ (\Rightarrow\neg)$$

Strukturální pravidla

- Pravidlo oslabení (Weakening)

$$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\mathrm{w}\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow \alpha}\ (\Rightarrow\mathrm{w})$$

- Pravidlo kontrakce (Contraction)

$$\frac{\Gamma, \alpha, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\mathrm{c}\Rightarrow)$$

- Pravidlo záměny (Exchange)

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \beta, \alpha, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\mathrm{e}\Rightarrow)$$

Co dělají čárky v LJ?

Tvrzení

Sekvent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ právě tehdy, když $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ.

Co dělají čárky v LJ?

Tvrzení

Sekvent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ právě tehdy, když $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ.

- Pravidlo záměny (e$\Rightarrow$) – umožňuje používat předpoklady v libovolném pořadí.

Co dělají čárky v LJ?

Tvrzení

Sekvent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ právě tehdy, když $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ.

- Pravidlo záměny (e$\Rightarrow$) – umožňuje používat předpoklady v libovolném pořadí.
- Pravidlo oslabení (w$\Rightarrow$) – umožňuje přidávat libovolné redundantní předpoklady.

Co dělají čárky v LJ?

Tvrzení

Sekvent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ právě tehdy, když $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ.

- Pravidlo záměny (e$\Rightarrow$) – umožňuje používat předpoklady v libovolném pořadí.
- Pravidlo oslabení (w$\Rightarrow$) – umožňuje přidávat libovolné redundantní předpoklady.
- Pravidlo kontrakce (c$\Rightarrow$) – umožňuje používat každý předpoklad vícekrát.

Co dělají čárky v LJ?

Tvrzení

Sekvent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ právě tehdy, když $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ.

- Pravidlo záměny (e⇒) – umožňuje používat předpoklady v libovolném pořadí.
- Pravidlo oslabení (w⇒) – umožňuje přidávat libovolné redundantní předpoklady.
- Pravidlo kontrakce (c⇒) – umožňuje používat každý předpoklad vícekrát.

V systému se všemi strukturálními pravidly je sekvent $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ dokazatelný, pokud β lze odvodit z některých (ne nutně všech) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ použitých v libovolném pořadí a libovolněkrát.

Systém bez strukturálních pravidel

V systému bez strukturálních pravidel bude tedy záviset na pořadí, počtu a využití předpokladů.

Systém bez strukturálních pravidel

V systému bez strukturálních pravidel bude tedy záviset na pořadí, počtu a využití předpokladů.

- Bez pravidla záměny (e$\Rightarrow$) – záleží na pořadí předpokladů.

Systém bez strukturálních pravidel

V systému bez strukturálních pravidel bude tedy záviset na pořadí, počtu a využití předpokladů.

- Bez pravidla záměny (e$\Rightarrow$) – záleží na pořadí předpokladů.
- Bez pravidla oslabení (w$\Rightarrow$) – v důkazu sekventu $\Pi \Rightarrow \Theta$ musí být každý předpoklad použit alespoň jednou.

Systém bez strukturálních pravidel

V systému bez strukturálních pravidel bude tedy záviset na pořadí, počtu a využití předpokladů.

- Bez pravidla záměny (e$\Rightarrow$) – záleží na pořadí předpokladů.
- Bez pravidla oslabení (w$\Rightarrow$) – v důkazu sekventu $\Pi \Rightarrow \Theta$ musí být každý předpoklad použit alespoň jednou.
- Bez pravidla kontrakce (c$\Rightarrow$) – v důkazu sekventu $\Pi \Rightarrow \Theta$ musí být každý předpoklad použit maximálně jednou.

Čárka a multiplikativní konjukce

Zavedeme novou logickou spojku $*$ (multiplikativní konjunkce, fusion), která bude reprezentovat čárku. Pravidla pro $*$ jsou:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha * \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}\,(*\Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Sigma \Rightarrow \beta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha * \beta}\,(\Rightarrow *)$$

Čárka a multiplikativní konjukce

Zavedeme novou logickou spojku $*$ (multiplikativní konjunkce, fusion), která bude reprezentovat čárku. Pravidla pro $*$ jsou:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, \alpha * \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (*\Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Sigma \Rightarrow \beta}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \alpha * \beta}\ (\Rightarrow *)$$

Tvrzení

V systému s pravidly $(*\Rightarrow)$, $(\Rightarrow *)$ a pravidlem řezu je sekvent $\alpha_1, \dots, \alpha_m \Rightarrow \beta$ dokazatelný právě tehdy, když $\alpha_1 * \cdots * \alpha_m \Rightarrow \beta$ je dokazatelný.

Dvě implikace

Bez pravidla záměny je přirozené zavést dvě implikace $/, \backslash$ splňující $\alpha, \alpha\backslash\beta \Rightarrow \beta$ a $\beta/\alpha, \alpha \Rightarrow \beta$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \beta/\alpha, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta} \; (/\!\Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta/\alpha} \; (\Rightarrow\!/)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \alpha\backslash\beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta} \; (\backslash\!\Rightarrow) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha\backslash\beta} \; (\Rightarrow\!\backslash)$$

Dvě implikace

Bez pravidla záměny je přirozené zavést dvě implikace $/, \backslash$ splňující $\alpha, \alpha\backslash\beta \Rightarrow \beta$ a $\beta/\alpha, \alpha \Rightarrow \beta$.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \beta/\alpha, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (/\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \beta/\alpha}\ (\Rightarrow/)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Pi, \beta, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Pi, \alpha\backslash\beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (\backslash\Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha\backslash\beta}\ (\Rightarrow\backslash)$$

Tvrzení

Sekvent $\alpha * \beta \Rightarrow \gamma$ dokazatelný právě tehdy, když $\alpha \Rightarrow \gamma/\beta$ je dokazatelný, a to je právě tehdy, když $\beta \Rightarrow \alpha\backslash\gamma$.

Konstanty $0, 1$

Konstantu 1 zavedeme jako nejslabší dokazatelnou formuli a 0 jako nejsilnější spornou formuli, tj. 1 implikuje každou dokazatelnou a každá sporná implikuje 0.

$$\frac{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \delta}{\Gamma, 1, \Sigma \Rightarrow \delta}\ (1w) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow 0}\ (0w)$$

Kalkul FL (Full Lambek)

- Jazyk FL: 0, $1, \wedge, \vee, *, /, \backslash$
- Jednozávěrové sekventy

- Iniciální sekventy: $\alpha \Rightarrow \alpha$, $\Rightarrow 1$, $0 \Rightarrow$
- Pravidlo řezu (cut)
- Pravidla pro $\wedge$ a $\vee$
- Pravidla ($*\Rightarrow$) a ($\Rightarrow*$)
- Pravidla ($/\Rightarrow$), ($\Rightarrow/$) a ($\backslash\Rightarrow$), ($\Rightarrow\backslash$)
- Pravidla (1w) a (w0)

Základní substrukturální logiky

FL odebírá všechny strukturální pravidla. Podobně je možné odebrat jen některé strukturální pravidla. Tímto způsobem obdržíme tzv. základní substrukturální logiky.

- FL — žádné pravidlo,
- FL_w — FL+(weakening),
- FL_e — FL+(exchange),
- FL_c — FL+(contraction),
- FL_{ec} — FL+(exchange, contraction),
- FL_{ew} — FL+(exchange, weakening),
- $FL_{cw} = FL_{cwe}$ — Intuicionistická logika.

Základní substrukturální logiky

FL odebírá všechny strukturální pravidla. Podobně je možné odebrat jen některé strukturální pravidla. Tímto způsobem obdržíme tzv. základní substrukturální logiky.

- FL — žádné pravidlo,
- FL_w — FL+(weakening),
- FL_e — FL+(exchange),
- FL_c — FL+(contraction),
- FL_{ec} — FL+(exchange, contraction),
- FL_{ew} — FL+(exchange, weakening),
- $\mathrm{FL}_{cw} = \mathrm{FL}_{cwe}$ — Intuicionistická logika.

Podobně lze odebírat strukturální pravidla z Gentzenovského kalkulu LK pro klasickou logiku. Takto vzniklý kalkulus se označuje CFL.

Algebraická sémantika intuicionistické logiky

- Třída Heytingových algeber $\mathcal{HA}$ tvoří algebraickou sémantiku pro intuicionistickou logiku.

Algebraická sémantika intuicionistické logiky

- Třída Heytingových algeber $\mathcal{HA}$ tvoří algebraickou sémantiku pro intuicionistickou logiku.
- Tzn. že sekvent $\Rightarrow \alpha$ je dokazatelný v LJ ($\vdash_{\mathsf{LJ}} \alpha$) právě tehdy, když identita $\alpha = 1$ platí ve všech Heytingových algebrách.

Algebraická sémantika intuicionistické logiky

- Třída Heytingových algeber $\mathcal{HA}$ tvoří algebraickou sémantiku pro intuicionistickou logiku.
- Tzn. že sekvent $\Rightarrow \alpha$ je dokazatelný v LJ ($\vdash_{\mathsf{LJ}} \alpha$) právě tehdy, když identita $\alpha = 1$ platí ve všech Heytingových algebrách.
- Pro množinu formulí Γ a formuli α platí

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{LJ}} \alpha \qquad \text{iff} \qquad \{\gamma = 1 \mid \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{HA}} \alpha = 1\,.$$

Residuované svazy a FL-algebry

Sekvent $\alpha \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ iff $\Rightarrow \alpha \to \beta$ je dokazatelný v LJ iff $\alpha \to \beta = 1$ platí v $\mathcal{HA}$ iff $\alpha \leq \beta$ v $\mathcal{HA}$.

Residuované svazy a FL-algebry

Sekvent $\alpha \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ iff $\Rightarrow \alpha \to \beta$ je dokazatelný v LJ iff $\alpha \to \beta = 1$ platí v $\mathcal{HA}$ iff $\alpha \leq \beta$ v $\mathcal{HA}$.

Definice

Residuovaný svaz je algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ splňující:

- $*$ je asociativní a $x * 1 = 1 * x = x$, tj. $(A, *, 1)$ je monoid,
- $(A, \wedge, \vee)$ je svaz,
- $x * y \leq z$ iff $y \leq x \backslash z$ iff $x \leq z / y$.

Residuované svazy a FL-algebry

Sekvent $\alpha \Rightarrow \beta$ je dokazatelný v LJ iff $\Rightarrow \alpha \to \beta$ je dokazatelný v LJ iff $\alpha \to \beta = 1$ platí v $\mathcal{HA}$ iff $\alpha \leq \beta$ v $\mathcal{HA}$.

Definice

Residuovaný svaz je algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ splňující:

- $*$ je asociativní a $x * 1 = 1 * x = x$, tj. $(A, *, 1)$ je monoid,
- $(A, \wedge, \vee)$ je svaz,
- $x * y \leq z$ iff $y \leq x \backslash z$ iff $x \leq z / y$.

Definice

FL-algebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 0, 1)$ je algebra, kde $(A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ residuovaný svaz.

Teorie residuace

Definice

Nechť P, Q jsou ČUMy. Zobrazení $f\colon P \to Q$ je residuované, pokud existuje zobrazení $f^*\colon Q \to P$ takové, že

$$f(p) \leq_Q q \quad \text{iff} \quad p \leq_P f^*(q)\,.$$

Dvojice f, f^* se nazývá residuovaný pár.

Teorie residuace

Definice

Nechť P, Q jsou ČUMy. Zobrazení $f\colon P \to Q$ je residuované, pokud existuje zobrazení $f^*\colon Q \to P$ takové, že

$$f(p) \leq_Q q \quad \text{iff} \quad p \leq_P f^*(q)\,.$$

Dvojice f, f^* se nazývá residuovaný pár.

Příklady

- Nechť P jsou otevřené množiny nějakého topologické prostoru a Q jeho uzavřené množiny. Pak pro $\mathrm{Clo}\colon P \to Q$ a $\mathrm{Int}\colon Q \to P$ platí $\mathrm{Clo}(A) \subseteq B$ iff $A \subseteq \mathrm{Int}(B)$.

Teorie residuace

Definice

Nechť P, Q jsou ČUMy. Zobrazení $f\colon P \to Q$ je residuované, pokud existuje zobrazení $f^*\colon Q \to P$ takové, že

$$f(p) \leq_Q q \quad \text{iff} \quad p \leq_P f^*(q)\,.$$

Dvojice f, f^* se nazývá residuovaný pár.

Příklady

- Nechť P jsou otevřené množiny nějakého topologické prostoru a Q jeho uzavřené množiny. Pak pro $\mathrm{Clo}\colon P \to Q$ a $\mathrm{Int}\colon Q \to P$ platí $\mathrm{Clo}(A) \subseteq B$ iff $A \subseteq \mathrm{Int}(B)$.
- Nechť $Q = 2^K$, kde K je třída struktur v jazyce $\mathcal{L}$ a $P = 2^{\mathrm{Fm}(\mathcal{L})}$. Pak $\mathrm{Mod}\colon P \to Q$ a $\mathrm{Th}\colon Q \to P$ splňují $\mathrm{Mod}(A) \subseteq B$ iff $A \supseteq \mathrm{Th}(B)$.

Teorie residuace

Tvrzení

Nechť $f : P \to Q$ a $f^* : Q \to P$ je residuovaný pár. Pak

- f, f^* jsou rostoucí,

Teorie residuace

Tvrzení

Nechť $f \colon P \to Q$ a $f^* \colon Q \to P$ je residuovaný pár. Pak

- f, f^* jsou rostoucí,
- $f^*(q) = \max\{p \in P \mid f(p) \leq q\}$,

Teorie residuace

Tvrzení

Nechť $f: P \to Q$ a $f^*: Q \to P$ je residuovaný pár. Pak

- f, f^* jsou rostoucí,
- $f^*(q) = \max\{p \in P \mid f(p) \leq q\}$,
- $f(p) = \min\{q \in Q \mid p \leq f^*(q)\}$,

Teorie residuace

Tvrzení

Nechť $f \colon P \to Q$ a $f^* \colon Q \to P$ je residuovaný pár. Pak

- f, f^* jsou rostoucí,
- $f^*(q) = \max\{p \in P \mid f(p) \leq q\}$,
- $f(p) = \min\{q \in Q \mid p \leq f^*(q)\}$,
- $f \circ f^* \circ f = f$ a $f^* \circ f \circ f^* = f^*$,

Teorie residuace

Tvrzení

Nechť $f\colon P \to Q$ a $f^*\colon Q \to P$ je residuovaný pár. Pak

- f, f^* jsou rostoucí,
- $f^*(q) = \max\{p \in P \mid f(p) \leq q\}$,
- $f(p) = \min\{q \in Q \mid p \leq f^*(q)\}$,
- $f \circ f^* \circ f = f$ a $f^* \circ f \circ f^* = f^*$,
- f zachovává suprema, tj. pro $X \subseteq P$ když $\bigvee X$ existuje, pak $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$,

Teorie residuace

Tvrzení

Nechť $f\colon P \to Q$ a $f^*\colon Q \to P$ je residuovaný pár. Pak

- f, f^* jsou rostoucí,
- $f^*(q) = \max\{p \in P \mid f(p) \leq q\}$,
- $f(p) = \min\{q \in Q \mid p \leq f^*(q)\}$,
- $f \circ f^* \circ f = f$ a $f^* \circ f \circ f^* = f^*$,
- f zachovává suprema, tj. pro $X \subseteq P$ když $\bigvee X$ existuje, pak $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$,
- f^* zachovává infima, tj. pro $Y \subseteq Q$ když $\bigwedge Y$ existuje, pak $f^*(\bigwedge Y) = \bigwedge f(Y)$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ je residuovaný svaz. Pak pro všechny $a, b, c \in A$ následující jsou residované páry:

- $f_a(x) = a * x$ a $f_a^*(x) = a \backslash x$,
- $g_b(y) = y * b$ a $g_b^*(y) = y / b$,
- $h_c(z) = c / z$ a $h_c^*(z) = z \backslash c$ (Galois connection).

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ je residuovaný svaz. Pak pro všechny $a, b, c \in A$ následující jsou residované páry:

- $f_a(x) = a * x$ a $f_a^*(x) = a\backslash x$,
- $g_b(y) = y * b$ a $g_b^*(y) = y/b$,
- $h_c(z) = c/z$ a $h_c^*(z) = z\backslash c$ (Galois connection).

Důsledek

Nechť $X, Y \subseteq A$. Pak

- pokud $\bigvee X$ a $\bigvee Y$ existují, pak $\bigvee X * \bigvee Y = \bigvee_{x \in X, y \in Y} xy$,

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ je residuovaný svaz. Pak pro všechny $a, b, c \in A$ následující jsou residované páry:

- $f_a(x) = a * x$ a $f_a^*(x) = a\backslash x$,
- $g_b(y) = y * b$ a $g_b^*(y) = y/b$,
- $h_c(z) = c/z$ a $h_c^*(z) = z\backslash c$ (Galois connection).

Důsledek

Nechť $X, Y \subseteq A$. Pak

- pokud $\bigvee X$ a $\bigvee Y$ existují, pak $\bigvee X * \bigvee Y = \bigvee_{x\in X, y\in Y} xy$,
- pokud $\bigvee X$ a $\bigwedge Y$ existují, pak $z\backslash(\bigwedge Y) = \bigwedge_{y\in Y} z\backslash y$, $(\bigvee X)\backslash z = \bigwedge_{x\in X} x\backslash z$ (podobně pro $/$),

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, *, /, \backslash, 1)$ je residuovaný svaz. Pak pro všechny $a, b, c \in A$ následující jsou residované páry:

- $f_a(x) = a * x$ a $f_a^*(x) = a\backslash x$,
- $g_b(y) = y * b$ a $g_b^*(y) = y/b$,
- $h_c(z) = c/z$ a $h_c^*(z) = z\backslash c$ (Galois connection).

Důsledek

Nechť $X, Y \subseteq A$. Pak

- pokud $\bigvee X$ a $\bigvee Y$ existují, pak $\bigvee X * \bigvee Y = \bigvee_{x\in X, y\in Y} xy$,
- pokud $\bigvee X$ a $\bigwedge Y$ existují, pak $z\backslash(\bigwedge Y) = \bigwedge_{y\in Y} z\backslash y$, $(\bigvee X)\backslash z = \bigwedge_{x\in X} x\backslash z$ (podobně pro $/$),
- $x\backslash z = \max\{y \in A \mid x * y \leq z\}$ a $z/y = \max\{x \in A \mid x * y \leq z\}$.

Příklady residovaných svazů a FL-algeber

- Booleovy algebry
- Heytingovy algebry
- Svazově uspořádané grupy
- MV-algebry, BL-algebry
- Množina ideálů komutativního okruhu uspořádaná inkluzí

Algebraická sémantika FL

Třída $\mathcal{FL}$ všech FL-algeber tvoří varietu a algebraickou sémantiku vůči, které je FL korektní a úplná.

Věta

Pro množinu formulí Γ a formuli α platí

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{FL}} \alpha \qquad \text{iff} \qquad \{1 = 1 \wedge \gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{FL}} 1 = 1 \wedge \alpha\,.$$

Algebraická sémantika FL

Třída $\mathcal{FL}$ všech FL-algeber tvoří varietu a algebraickou sémantiku vůči, které je FL korektní a úplná.

Věta

Pro množinu formulí Γ a formuli α platí

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{FL}} \alpha \qquad \text{iff} \qquad \{1 = 1 \wedge \gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{FL}} 1 = 1 \wedge \alpha\,.$$

Věta

FL je algebraizovatelná (ve smyslu Bloka a Pigozziho).

$$\begin{array}{rcl} \varphi & \overset{\tau}{\mapsto} & 1 = 1 \wedge \gamma \\ s = t & \overset{\varrho}{\mapsto} & s\backslash t \wedge t\backslash s \end{array}$$

Rozšíření FL

Definice

Nechť Γ je množina formulí a $\sigma(\Gamma)$ její uzávěr na substituce v jazyku FL. Axiomatické rozšíření FL+Γ je logika vzniklá z FL přidáním iniciálních sekventů $\Rightarrow \gamma$ pro všechny $\gamma \in \sigma(\Gamma)$.

Rozšíření FL

Definice

Nechť Γ je množina formulí a $\sigma(\Gamma)$ její uzávěr na substituce v jazyku FL. Axiomatické rozšíření FL+Γ je logika vzniklá z FL přidáním iniciálních sekventů $\Rightarrow \gamma$ pro všechny $\gamma \in \sigma(\Gamma)$.

Definice

- Nechť FL+Γ je axiomatické rozšíření FL. Symbolem $\mathcal{V}(\Gamma)$ značíme podvarietu $\mathcal{FL}$ axiomatizovanou identitami $1 = 1 \wedge \gamma$ pro všechny $\gamma \in \Gamma$.

Rozšíření FL

Definice

Nechť Γ je množina formulí a $\sigma(\Gamma)$ její uzávěr na substituce v jazyku FL. Axiomatické rozšíření FL+Γ je logika vzniklá z FL přidáním iniciálních sekventů $\Rightarrow \gamma$ pro všechny $\gamma \in \sigma(\Gamma)$.

Definice

- Nechť FL+Γ je axiomatické rozšíření FL. Symbolem $\mathcal{V}(\Gamma)$ značíme podvarietu $\mathcal{FL}$ axiomatizovanou identitami $1 = 1 \wedge \gamma$ pro všechny $\gamma \in \Gamma$.
- Nechť $\mathcal{K}$ je třída FL-algeber. Symbolem $L(\mathcal{K})$ značíme axiomatické rozšíření FL axiomatizované množinou formulí $\{\varphi \mid$ rovnice $1 = 1 \wedge \varphi$ platí v $\mathcal{K}\}$.

Důsledky algebraizovatelnosti

Věta

- Nechť FL+Γ je axiomatické rozšíření FL. Pro množinu formulí Σ a formuli α platí

$$\Sigma \vdash_{\mathsf{FL+\Gamma}} \alpha \qquad \text{iff} \qquad \{1 = 1 \wedge \gamma \mid \gamma \in \Sigma\} \models_{\mathcal{V}(\Gamma)} 1 = 1 \wedge \alpha \,.$$

Důsledky algebraizovatelnosti

Věta

- Nechť FL+Γ je axiomatické rozšíření FL. Pro množinu formulí Σ a formuli α platí

$$\Sigma \vdash_{\mathsf{FL+\Gamma}} \alpha \qquad \text{iff} \qquad \{1 = 1 \wedge \gamma \mid \gamma \in \Sigma\} \models_{\mathcal{V}(\Gamma)} 1 = 1 \wedge \alpha\,.$$

- Zobrazení $\mathcal{V}$ a L tvoří duální svazový izomorfismus mezi svazem axiomatických rozšíření FL a svazem podvariet FL-algeber.

Aplikace

- (Ne)Rozhodnutelnost, vlastnost konečných modelů
- Craigova interpolační vlastnost, amalgamace
- Minimální podvariety, Jonssonovo lemma
- Volné algebry, normální formy
- Globální věta o dedukci, EDPC

Některá axiomatická rozšíření FL

- FL_e=FL+$\{(\alpha * \beta)\backslash(\beta * \alpha)\}$, FL_c=FL+$\{\alpha\backslash(\alpha * \alpha)\}$, FL_w=FL+$\{\alpha\backslash 1, 0\backslash\alpha\}$, CFL=FL+$\{\neg\neg\alpha\backslash\alpha\}$.

  V případě prezence pravidla záměny $/ = \backslash$ a značí se $\rightarrow$.

Některá axiomatická rozšíření FL

- FL_e=FL+$\{(\alpha * \beta)\backslash(\beta * \alpha)\}$, FL_c=FL+$\{\alpha\backslash(\alpha * \alpha)\}$, FL_w=FL+$\{\alpha\backslash 1, 0\backslash\alpha\}$, CFL=FL+$\{\neg\neg\alpha\backslash\alpha\}$.

  V případě prezence pravidla záměny $/ = \backslash$ a značí se $\to$.
- Relevanční logika R=$\mathsf{CFL}_{ec} + \{(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))\}$.
- Multiplikativně aditivní fragment lineární logiky MALL=CFL_e.
- Gödel-Dummetova logika G=$\mathsf{FL}_{cew} + \{(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)\}$.
- Hájkova Basic Fuzzy Logic
  BL=FL_{ew}+$\{(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha), (\alpha \wedge \beta) \to (\alpha * (\alpha \to \beta))\}$.
- Lukasiewiczova logika
  Ł=$\mathsf{CFL}_{ew} + \{(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha), (\alpha \wedge \beta) \to (\alpha * (\alpha \to \beta))\}$.
- BCK= implikační fragment FL_{ew}