Konečně generované polookruhy

Obhajoba diplomové práce

Autor: LUCIEN ŠÍMA
Vedoucí: VÍTĚZSLAV KALA

23. června 2021

Polookruhy

- „Po ránu je nejlepší začít definicí.“ (Dalibor Šmíd)
- *Polookruh* je $(S,+,\cdot)$
- Obě operace jsou asociativní a komutativní
- Distributivita: $a \cdot (b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

- Příklady polookruhů:
- $(\mathbb{N},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q}^+,+,\cdot)$, $(f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \max,+)$

Ideálově-jednoduché polookruhy

- *Ideálem* je $J \subseteq S$ splňující:
- 1) $a,b \in J \rightarrow a+b \in J$
- 2) $a \in J$, $s \in S \rightarrow sa \in J$

- Polookruh je *ideálově-jednoduchý*, pokud neobsahuje vlastní ideály.
- Ideál J se nazývá *vlastní*, pokud $|J| \geq 2$ a zároveň $J \neq S$.

(Para)polotělesa

- $S(+,\cdot)$ je *parapolotěleso*, pokud $S(\cdot)$ tvoří grupu

- $S(+,\cdot)$ je *polotěleso*, pokud obsahuje prvek 0 takový, že:
- $0 \cdot s = 0$
- $S - \{0\}$ je multiplikativní grupa

- **Pozorování 2.6:** Parapolotělesa a polotělesa jsou ideálově jednoduchá.

Klasifikace 1 [Kepka et al., 2001]

Ideálově jednoduché polookruhy

- Jednoprvkové a dvouprvkové
- Z_p s nulovým násobením
- Polotělesa
- Parapolotělesa

Klasifikace 2 [Kepka et al., 2001]

Ideálově jednoduché polookruhy

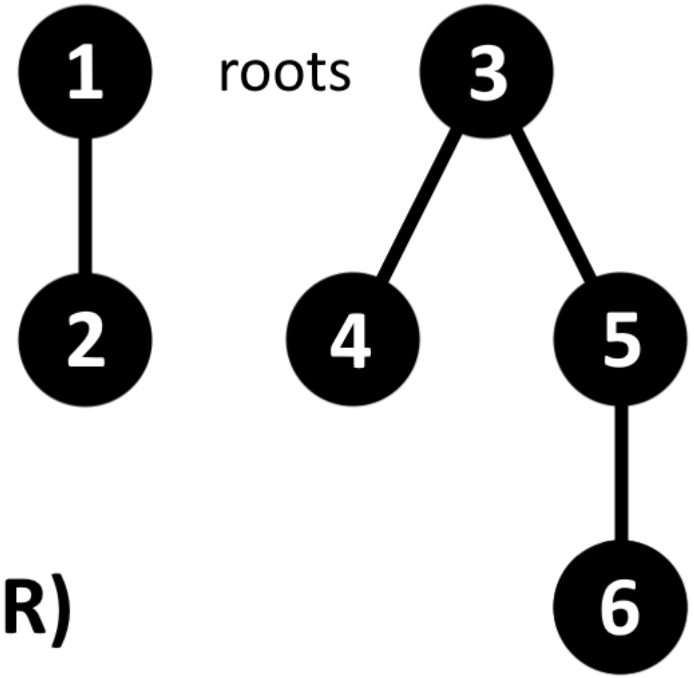
- Jednoprvkové a dvouprvkové
- Z_p s nulovým násobením
- Polotělesa (G \ 0 (·) grupa)
  - Tělesa
  - Parapolotělesa s prvkem 0
  - Grupy s nul. sčítáním
  - Parapolotělesa v mult. grupě
- Parapolotělesa (G(·) grupa)

Klasifikace 3 [Kala, 2017]

- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:

Klasifikace 3 [Kala, 2017]

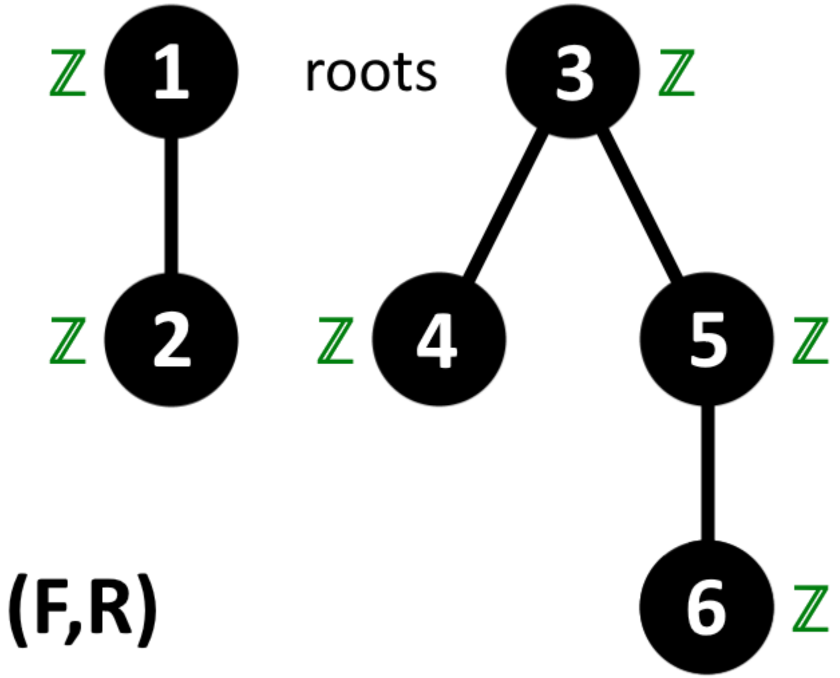
- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:
- 1. krok: najdu zakořeněný les (F,R)



(F,R)

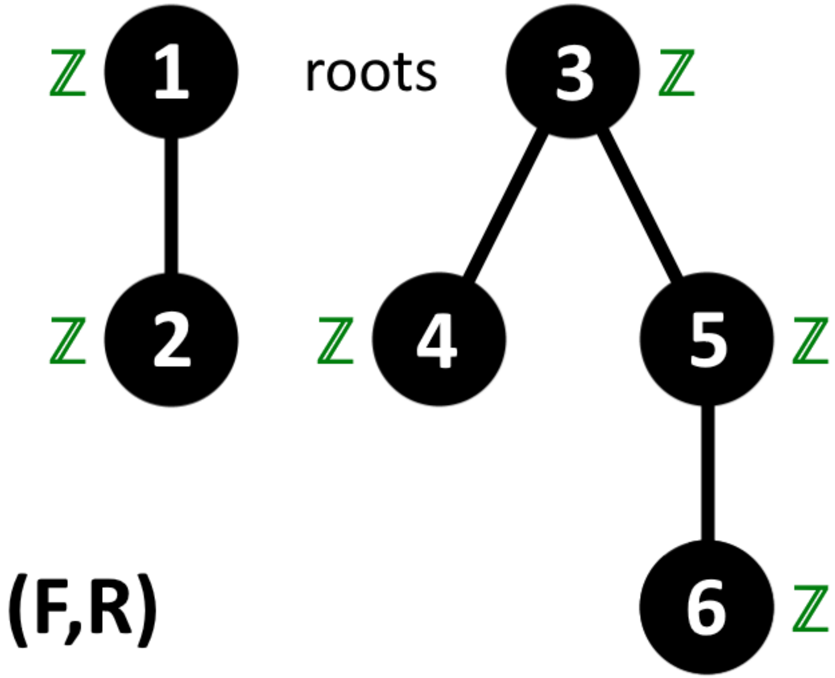
Klasifikace 3 [Kala, 2017]

- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:
- 1. krok: najdu zakořeněný les (F,R)
- 2. krok: $\mathbb{Z}$ v každém vrcholu



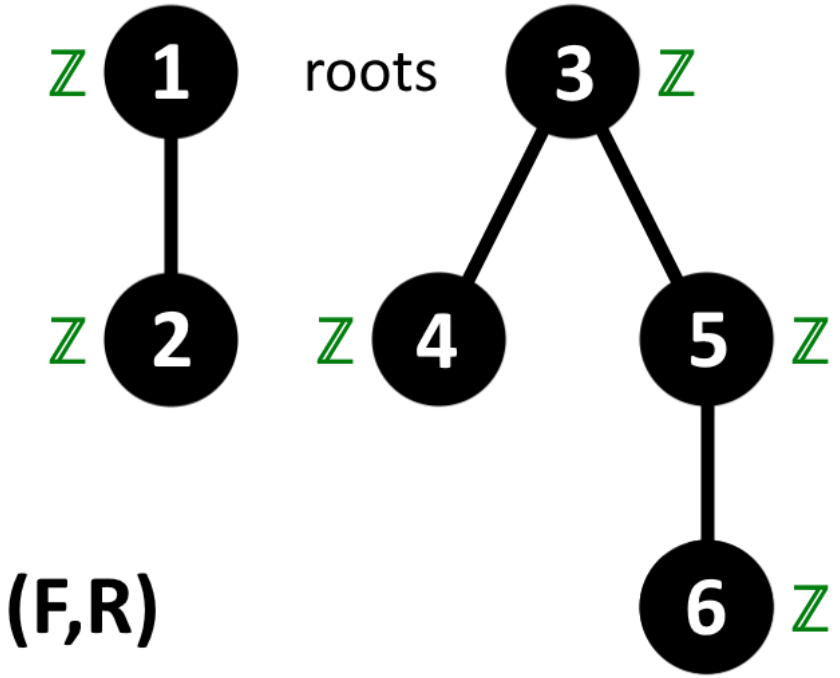
Klasifikace 3 [Kala, 2017]

- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:
- 1. krok: najdu zakořeněný les (F,R)
- 2. krok: $\mathbb{Z}$ v každém vrcholu
- 3. krok: definuji operace
- **x** = (5,-6,2,-1,5,2), **y** = (4,9,2,3,3,4)



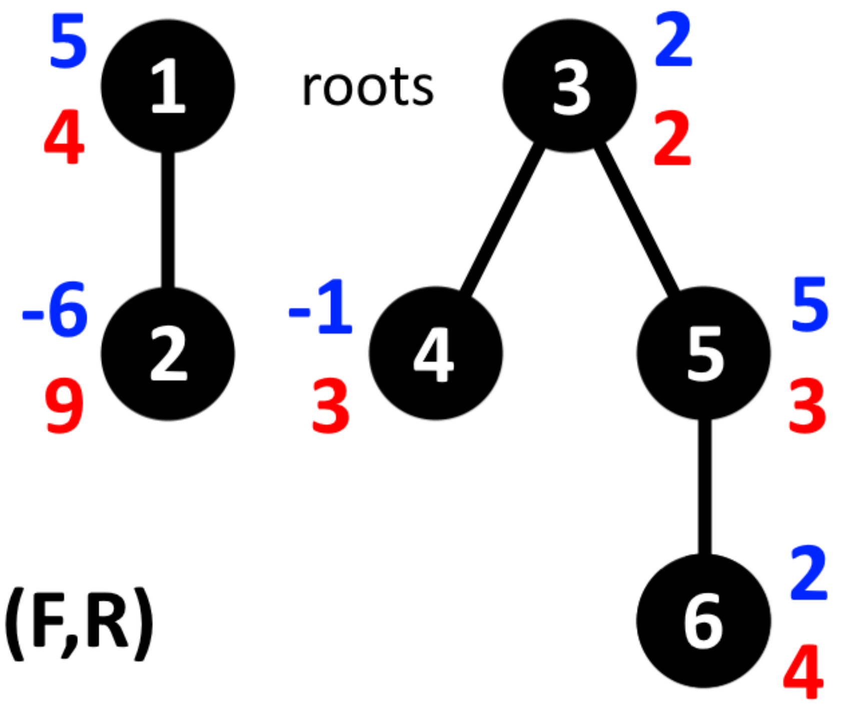
Klasifikace 3 [Kala, 2017]

- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:
- 1. krok: najdu zakořeněný les (F,R)
- 2. krok: $\mathbb{Z}$ v každém vrcholu
- 3. krok: definuji operace
- **x** = (5,-6,2,-1,5,2), **y** = (4,9,2,3,3,4)
- Sčítání po složkách (+)
- **x+y** = (9,3,4,2,8,6)



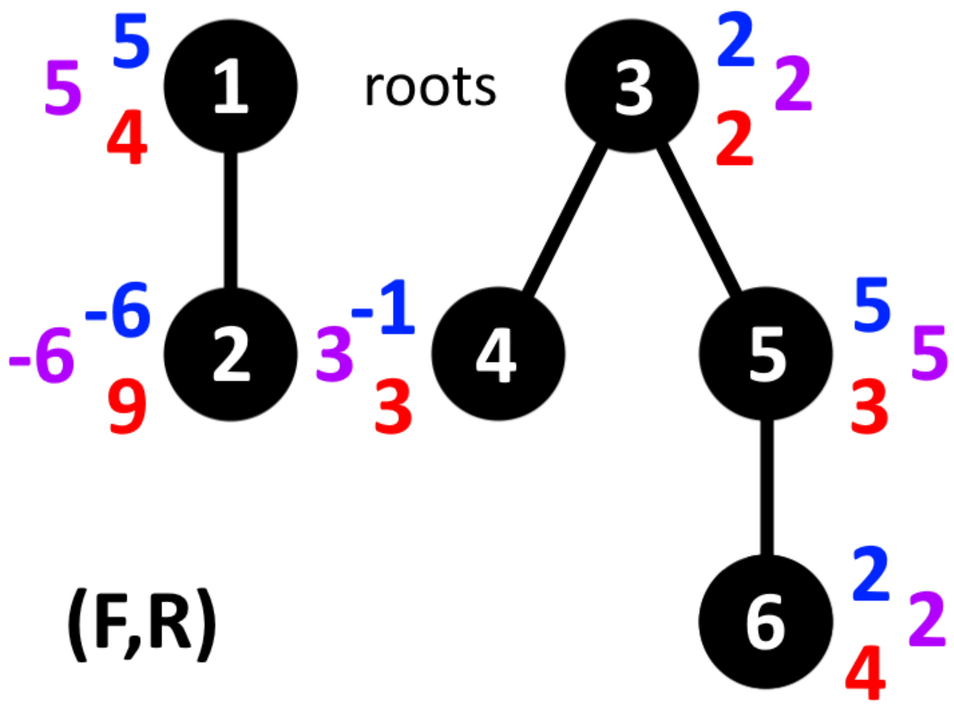
Klasifikace 3 [Kala, 2017]

- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:
- 1. krok: najdu zakořeněný les (F,R)
- 2. krok: $\mathbb{Z}$ v každém vrcholu
- 3. krok: definuji operace
- **x** = (5,-6,2,-1,5,2), **y** = (4,9,2,3,3,4)
- Sčítání po složkách (+)
- **x+y** = (9,3,4,2,8,6)
- Lex. maximum ($\vee$) vzhledem k (F,R)



Klasifikace 3 [Kala, 2017]

- Kon. gen. parapolotěleso $S(+,\cdot,^{-1}) \cong (G(F,R),\vee,+,-)$, které zkonstruuji takto:
- 1. krok: najdu zakořeněný les (F,R)
- 2. krok: $\mathbb{Z}$ v každém vrcholu
- 3. krok: definuji operace
- **x** = (5,-6,2,-1,5,2), **y** = (4,9,2,3,3,4)
- Sčítání po složkách (+)
- **x+y** = (9,3,4,2,8,6)
- Lex. maximum ($\vee$) vzhledem k (F,R)
- **x$\vee$y** = (5,-6,2,3,5,2)



Vlastní výsledky

- Detailní přehled ideálově-jednoduchých polookruhů
- Určení počtu generátorů parapolotěles
- Klasifikace kon. gen. polotěles

Určení počtu generátorů

- Otázka: Jaký je minimální počet generátorů parapolotělesa P = G(F,R)?
- Budeme jej značit m(F,R)

- Jednoduchý případ - (F,R) = n izolovaných vrcholů (Z_n)
- Operace: sčítání (+) a maximum (V) po složkách

- Hledáme minimální počet generátorů $\mathbb{Z}^n$ (+,max)
- $\mathbb{Z}^n$ (+) je n+1-generovaná

Určení počtu generátorů - Z_n

- **Tvrzení 4.4:** $m(Z_1) = 2$, $m(Z_2) = 2$
- $G_1 = \{(1), (-1)\}$ $G_2 = \{(1, -2), (-2,1)\}$

Určení počtu generátorů - Z_n

- **Věta 4.7:** $m(Z_n) = 3$ pro každé $n > 2$
- $G = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, $\mathbf{a} = (1,2,\dots,n)$, $b_i = n^2 + 1 - i^2$, $\mathbf{c} = (-1,-1,\dots,-1)$
- $\mathbf{u}_i = 2i \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}$
- $u_{ij} = n^2 + 1 + j(2i-j)$
- $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i + (u_{ii} - 1) * \mathbf{c}$
- $\mathbf{1} = \mathbf{v}_1 \vee \mathbf{v}_2 \vee \dots \vee \mathbf{v}_n$
- $\mathbf{0} = \mathbf{1} + \mathbf{c}$
- $\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i \vee \mathbf{0}$
- Kanonické vektory s vektorem **c** již nagenerují $\mathbb{Z}^n$

a	1	2	3	4	5	6
b	36	33	28	21	12	1
c	-1	-1	-1	-1	-1	-1

2a+b	**u1**	38	37	34	29	22	13
4a+b	**u2**	40	41	40	37	32	25
6a+b	**u3**	42	45	46	45	42	37
8a+b	**u4**	44	49	52	53	52	49
10a+b	**u5**	46	53	58	61	62	61
12a+b	**u6**	48	57	64	69	72	73

v1	1	0	-3	-8	-15	-24
v2	0	1	0	-3	-8	-15
v3	-3	0	1	0	-3	-8
v4	-8	-3	0	1	0	-3
v5	-15	-8	-3	0	1	0
v6	-24	-15	-8	-3	0	1

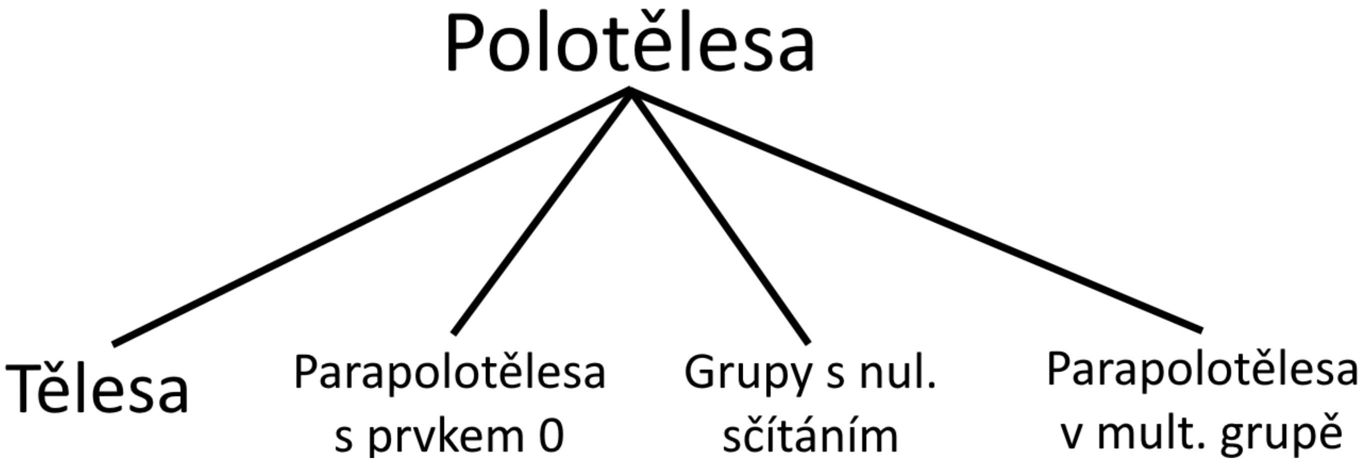
Určení počtu generátorů - obecně

- Otázka: Jaký je minimální počet generátorů parapolotělesa $P \cong G(F,R)$?

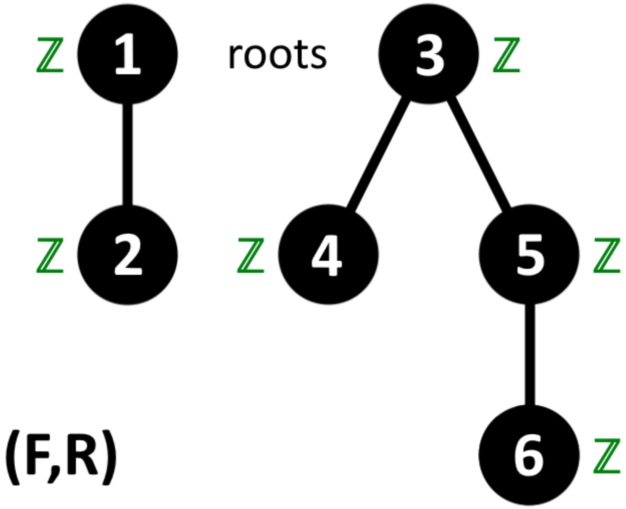
- Odpověď:
- **Věta 4.15:** (F,R) les hloubky L, pak: $L+1 \leq m(F,R) \leq 3L$
- Navíc pro binární (F,R) máme dokonce: $L+1 \leq m(F,R) \leq 2L$

Konečně generovaná polotělesa

- Polotělesa vznikají z parapolotěles

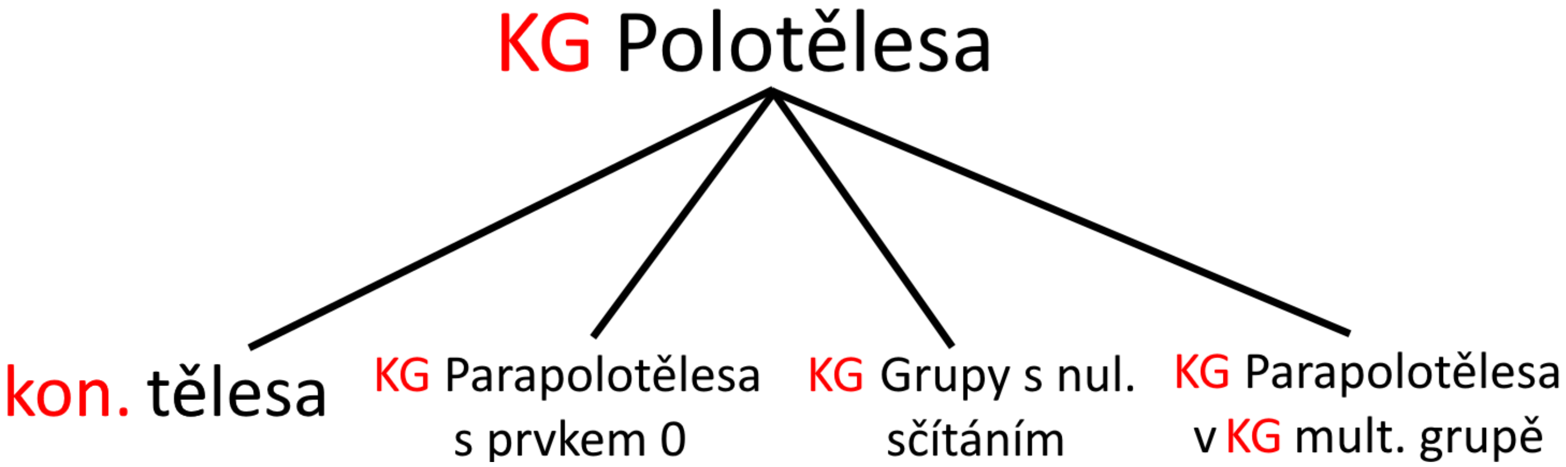


- Konečně generovaná parapolotělesa jsou izomorfní G(F,R).

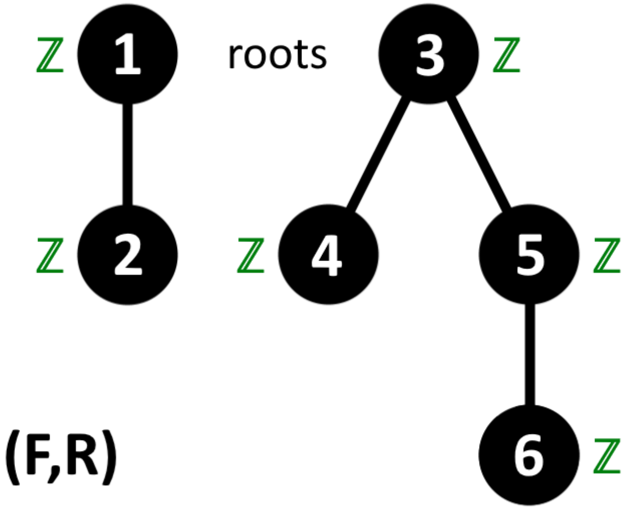


Konečně generovaná polotělesa

- KG Polotělesa vznikají z KG parapolotěles



- Konečně generovaná parapolotělesa jsou izomorfní G(F,R).



Konečně generovaná polotělesa

- **Důsledek 5.2:**
- Kon. gen. ideálově-jednoduché polokruhy jsou kon. gen. jako multiplikativní pologrupa

Konečně generovaná polotělesa

- **Věta 5.6:** S kon. gen. polotěleso typu (4), za určitých podmínek
- $S \cong P \oplus G \cup \{\infty\}$, kde $P \cong G(F,R)$
- $(\mathbf{u},g) \cdot (\mathbf{v},h) = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, g+h)$
- $(\mathbf{u},g) + (\mathbf{v},g) = (\mathbf{u} \vee \mathbf{v}, g)$
- $(\mathbf{u},g) + (\mathbf{v},h) = \infty$ pro g,h různá

Konečně generovaná polotělesa

- **Věta 5.8:** Obecnější klasifikace kon. gen. polotěles typu (4)

Theorem 5.8. *Let S be a fg-semifield of type (4) and let Assumption 5.7 be satisfied. Then, we can find a fg-abelian group $G = \mathbb{Z}^n \oplus T$ such that $T = \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_k}$, where $q_1, \dots, q_k$ are prime powers. Moreover, we can find a rooted forest (F, R) consisting of m vertices, natural numbers $d_1, \dots, d_m$ and $\mathbf{t_1}, \dots, \mathbf{t_m} \in T$ such that $S \simeq G(F, R) \times G \cup \{\infty\}$.*

We set $s + \infty = \infty$ and $s \cdot \infty = \infty$ for every $s \in S$. The binary operations on two arbitrary elements $\mathbf{g} = (\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w})$ and $\mathbf{h} = (\mathbf{x} \mid \mathbf{y} \mid \mathbf{z})$ from $G(F, R) \oplus \mathbb{Z}^n \oplus T$ are defined as follows:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{u} + \mathbf{x} \mid \mathbf{v} + \mathbf{y} \mid \mathbf{w} + \mathbf{z}).$$

If the following three conditions

(1) d_i divides $x_i - u_i$ for each $i \in [m]$

(2) $\mathbf{v} = \mathbf{y}$

(3) we can find $\mathbf{t} \in T$ such that $\mathbf{w} = \mathbf{t} + t(\mathbf{u})$ and $\mathbf{z} = \mathbf{t} + t(\mathbf{x})$, where $t(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lfloor \frac{x_i}{d_i} \rfloor \cdot \mathbf{t_i}$

are met, then we let

$$\mathbf{g} + \mathbf{h} = (\mathbf{u} \vee \mathbf{x} \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{t} + t(\mathbf{u} \vee \mathbf{x}))$$

and we set $\mathbf{g} + \mathbf{h} = \infty$ otherwise.

Děkuji za pozornost!